Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Я. ПОВЗНЕР

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ФУНКЦИЯМ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 VI 1955)

Рассмотрим во всем трехмерном пространстве E оператор Шредингера $Lu = -\Delta u + c(x)u$, где x — вектор из E. Мы будем считать, что $c(x) = 0$ вне некоторой области и непрерывно.

Пусть ω — единичный вектор. Задача квантовой теории рассеяния состоит в нахождении решения $A(\lambda, \omega; x)$ уравнения $L(A) = \lambda^2 A$ ($\operatorname{Im}\lambda = 0$), имеющего вид: $A = \frac{1}{4\pi}\exp[-i\lambda(\omega, x)] + A_1(\lambda, \omega; x)$, где A_1 удовлетворяет условиям излучения $\left(A_1(\lambda, \omega; x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x|\left(\frac{dA_1}{d|x|} - i\lambda A_1\right) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$.

Целью настоящей заметки является построение спектральной функции оператора L по функции A и установление формул обращения, в которых функция A играет ту же роль, что и плоские волны в теории трехмерного интеграла Фурье.

Справедливы следующие утверждения ([1]):

1. *Оператор L не имеет дискретного положительного спектра* *.

2. *Если $0 < \alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, точки x, y меняются в ограниченной области D, то резольвентное ядро $R(x, y; \mu^2)$ ($\mu = \lambda + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$) оператора L равномерно по x, $y \subset D$, $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, стремится к пределу $H(x, y; \lambda) = H(y, x; \lambda)$ при $\varepsilon \to 0$.*

3. *Функция $R(x, y, \mu^2)$ и ее предел H при $\mu = \lambda$ удовлетворяют по каждой из переменных уравнениям*

$$R(x, y; \mu^2) = \frac{\exp i\mu|x-y|}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{\exp i\mu|x-s|}{|x-s|} c(s) R(s, y; \mu^2)\, ds, \quad (1)$$

$$-\Delta R + c(x)R - \mu^2 R = 0. \quad (1')$$

4. *Если $\vartheta(x, y; s)$ — спектральная функция оператора L, то*

$$\frac{d\vartheta(x, y; s)}{ds} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Im} H(x, y; \sqrt{s}) \quad (s > 0). \quad (2)$$

---

* Мы не смогли доказать, что при $|c(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 1/2$, положительный дискретный спектр отсутствует. Только неумение доказать это предложение мешает утверждать, что все результаты настоящей работы верны при указанном поведении $c(x)$. В ([1]) показано, что если дополнительно $c(x)$ для достаточно больших $|x|$ есть функция только от $|x|$, то положительного дискретного спектра нет.

Из (1) и условия, наложенного на $c(x)$, следует, что $H(x, y; \lambda)$ удовлетворяет условиям излучения и имеет асимптотическое представление $\left(\omega = \frac{x}{|x|}\right)$:

$$H(x,y;\lambda) = \frac{\exp(i\lambda|x|)}{|x|}\left[\frac{1}{4\pi}\exp(-i\lambda(\omega, y)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\pi}\int_E \exp(-i\lambda(\omega,s))\, c(s)\, H(s,y;\lambda)\, ds\right] + o\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

С другой стороны, $A_1(\lambda, \omega; x)$ удовлетворяет уравнению $4\pi(-\Delta A_1 + c(x)A_1 - \lambda^2 A_1) = -c(x)\exp(-i\lambda(\omega, x))$, а это вместе с условиями излучения влечет за собой равенство

$$4\pi A_1(\lambda, \omega; x) = -\int_E H(x, s; \lambda)\exp(-i\lambda(\omega, s))\, c(s)\, ds.$$

Отсюда и из асимптотики для H вытекает, что

$$H(x, y; \lambda) = \frac{\exp(i\lambda|x|)}{|x|} A(\lambda, \omega; x) + o\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{3}$$

Применим теперь формулу Грина к функциям $H(x, z; \lambda)$ и $\overline{H}(y, z; \lambda)$, удовлетворяющим по z уравнению (1′) с $\mu = \lambda$. Интегрируя по сфере K_r радиуса r, будем иметь $\left(\Sigma_\omega$ — поверхность единичной сферы, $r = |z|$, $\omega = \frac{z}{|z|}\right)$:

$$H(x, y; \lambda) - \overline{H}(x, y; \lambda) =$$

$$= \int_{\Sigma_\omega}\left(\frac{dH(x, z; \lambda)}{dr}\overline{H}(z, y; \lambda) - H(x, z; \lambda)\frac{d\overline{H}(z, y; \lambda)}{dr}\right) r^2\, d\omega =$$

$$= \int_{\Sigma_\omega} 2i\lambda A(\lambda, \omega; y)\,\overline{A}(\lambda, \omega; x)\, d\omega + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Устремляя r к бесконечности и учитывая (2), получим основную формулу

$$\frac{d\vartheta(x, y; s)}{ds} = \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_\omega}\sqrt{s}\, A(\sqrt{s}, \omega; x)\,\overline{A}(\sqrt{s}, \omega; y)\, d\omega \quad (s > 0). \tag{4}$$

Обозначим через $L^2_{(\lambda,\,\omega)}$ пространство функций $F(\lambda, \omega)$ с нормой $\|F\|^2 = \int_0^\infty \lambda^2\, d\lambda \int_{\Sigma_\omega} |F|^2\, d\omega$, через $\mathcal{E}_\lambda$ — разложение единицы оператора L. Положим $Uf = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_E \overline{A}(\lambda, \omega; y)\, f(y)\, dy = F(\lambda, \omega)$, $\overset{+}{L}{}^2 = (\mathcal{E}_\infty - \mathcal{E}_0)L^2$, $\overline{L}^2 = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{-\infty})L^2$.

Из (4) и из тождества $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_E \vartheta(x, y; s) f(y)\, dy$ вытекает формула разложения:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{0} d\mathcal{E}_\lambda f + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \lambda^2 \int_{\Sigma_\omega} A(\lambda, \omega; x) F(\lambda, \omega)\, d\omega\, d\lambda. \tag{5}$$

Формула (5) показывает также, что Uf отображает $\overset{+}{L}{}^2$ изометрично на $L^2_{(\lambda,\,\omega)}$.

Имеют место и двойственные формулы: если $F(\lambda, \omega)$ — любой элемент из $L^2_{(\lambda, \omega)}$, то $\int\limits_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} A(\lambda, \omega; x) F(\lambda, \omega) d\omega$ сходится в среднем квадратичном к элементу $f(x) \subset \overset{+}{L}{}^2$ и

$$F(\lambda, \omega) = \int\limits_E f(x) \overline{A}(\lambda, \omega; x) dx. \tag{6}$$

Для доказательства достаточно показать, что верна следующая теорема:

Теорема 1. *Uf отображает $\overset{+}{L}{}^2$ на все пространство $L^2_{(\lambda, \omega)}$.*

Лемма 1. *Если $F(\lambda, \omega) \subset L^2_{(\lambda, \omega)}$, то*

$$\text{l.i.m.} \int\limits_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} F(\lambda, \omega) A(\lambda, \omega; x) d\omega \subset L^2.$$

Доказательство. Действительно, считая, что $F(\lambda, \omega)$ и $g(x)$ финитны (равны нулю вне некоторой сферы и непрерывны), положим

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} F(\lambda, \omega) A(\lambda, \omega; x) d\omega.$$

Но

$$\overline{(f, g)} = \int\limits_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} \overline{F}(\lambda, \omega) d\omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_E \overline{A}(\lambda, \omega; x) g(x) dx,$$

откуда $|(f, g)| \leqslant \|F\| \, \|U(g)\| \leqslant \|F\| \, \|g\|$, что дает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$. $F(\lambda, \omega) \subset L^2_{(\lambda, \omega)}$,*

$$f(x) = \int\limits_\alpha^\beta \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} F(\lambda, \omega) A(\lambda, \omega; x) d\omega.$$

Тогда $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) f = f$.

Доказательство. По лемме 1, $f \subset L^2$. Возьмем $\mu = \lambda + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Из (1) и дифференциального уравнения для $A(\lambda, \omega; x)$ получим при помощи формулы Грина, учитывая экспоненциальное убывание R_μ, что

$$A(\lambda, \omega; x) = (\lambda^2 - \mu^2) \int\limits_E R(x, y; \mu) A(\lambda, \omega; y) dy.$$

Но тогда $\int\limits_E R(x, y; \mu^2) f(y) dy = \int\limits_\alpha^\beta \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} \frac{F(\lambda, \omega) A(\lambda, \omega; x)}{\lambda^2 - \mu^2} d\omega$, откуда,

используя известную формулу $\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha = \lim\limits_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha + i\delta}^{\beta + i\delta} (R_z - R_{\bar{z}}) dz$, получим требуемое.

Лемма 3. *Преобразование Uf отображает L^2 на все $L^2_{(\lambda, \omega)}$.*

Доказательство. Множество UL^2 в силу ограниченности U замкнуто. Поэтому достаточно показать, что нет элемента в $L^2_{(\lambda, \omega)}$, ортогонального всем Ug. Пусть, напротив, $F(\lambda, \omega)$ — такой элемент. Тогда для любой финитной $g(x)$ имеем $\int\limits_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} F(\lambda, \omega) d\omega \cdot \int\limits_E \overline{A}(\lambda, \omega; y) g(y) dy = 0$.

По лемме 1, $f(x) = \int\limits_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int\limits_{\Sigma_\omega} \overline{F}(\lambda, \omega) A(\lambda, \omega; x) d\omega \subset L^2$, и наше предположение эквивалентно утверждению, что $f(x) = 0$. Но тогда при лю-

бых $0<\alpha<\beta$ $(\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) f = 0$, откуда, по лемме 2, получим, что $\int_\alpha^\beta \lambda^2 d\lambda \int_{\Sigma_\omega} \overline{F}(\lambda, \omega) A(\lambda, \omega; x) d\omega = 0$ для любых $0<\alpha<\beta$.

Полагая $\gamma(\lambda, x) = \int_{\Sigma_\omega} \overline{F}(\lambda, \omega) A(\lambda, \omega; x) d\omega$, имеем: $\int_E \gamma(\lambda, x) g(x) dx = 0$ при произвольной $g(x)$ для почти всех λ. Однако $\gamma(\lambda, x)$ непрерывна по x, откуда следует, что для почти всех λ $\gamma(\lambda, x)$ есть тождественный нуль. Положим теперь $g(x, y) = \frac{\exp(i\lambda|x-y|)}{4\pi|x-y|}$ и рассмотрим выраженье

$$\int_{\Sigma_r} \left(\frac{dg(x, y)}{d|y|} \gamma(\lambda, y) - g(x, y) \frac{d\gamma(\lambda, y)}{d|y|} \right) d\sigma(y) =$$

$$= \int_{\Sigma_\omega} \overline{F}(\lambda, \omega) d\omega \int_{\Sigma_r} \left(\frac{dg(x, y)}{d|y|} A(\lambda, \omega; y) - g(x, y) \frac{dA(\lambda, \omega; y)}{d|y|} \right) d\sigma(y),$$

равное нулю для почти всех λ. Заменяя во внутреннем интеграле A через $\frac{1}{4\pi}\exp(-i\lambda(\omega, x)) + A_1$, учитывая тождество $\int_{\Sigma_r} \left[\frac{dg(x, y)}{d|y|} \exp(-i\lambda(\omega, y)) - \right.$ $\left. - g(x, y) \frac{d}{d|y|} \exp(-i\lambda(\omega, y)) \right] d\sigma(y) = \exp(-i\lambda(\omega, x))$ и устремляя r к бесконечности, получим, что поверхностный интеграл, содержащий A_1, устремится к нулю в силу условий излучения, откуда вытекает, что $\int_{\Sigma_\omega} \overline{F}(\lambda, \omega) e^{-i\lambda(\omega, x)} d\omega = 0$, но тогда $F(\lambda, \omega) = 0$, и лемма доказана.

Лемма 4. *Если* $g \subset L^2$, *то* $h(\lambda, \omega) = \int_E g(x) \overline{A}(\lambda, \omega; x) dx = 0$.

Действительно, положим $f(x) = \int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int_{\Sigma_\omega} A(\lambda, \omega; x) \overline{F}(\lambda, \omega) d\omega$ (F финитная). По лемме 2 имеем $f \subset \overset{+}{L}{}^2$. Но тогда $(g, f) = 0$ или $\int_E \left(\int_0^\infty \lambda^2 d\lambda \int_{\Sigma_\omega} \overline{A}(\lambda, \omega; x) F(\lambda, \omega) d\omega \right) g(x) dx = 0$. Меняя порядок интегрирования и учитывая произвольность F, получим доказательство леммы.

Из лемм 3 и 4 утверждение теоремы 1 следует немедленно.

Поступило
18 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 32 (74), № 1 (1953).