Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИКА

В. В. НЕМЫЦКИЙ

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 XII 1954)

Рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_k + f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

и предполагается: 1) $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -b^2 \neq 0$, где λ_i — корни характеристического уравнения $\det|A - \lambda E| = 0$; 2) $|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant C_R|x|$ в шаре $|x| \leqslant R$; 3) через каждую точку шара $|x| \leqslant R$ проходит хотя бы одно решение системы (1), определенное для всех тех значений t, для которых оно находится в шаре $|x| \leqslant R$.

Вводим обозначения: m — число функций f_i, отличных от нуля в шаре $|x| \leqslant R$, и $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}^2}$.

Теорема 1. *Если для всех x, для которых $|x| \leqslant R$, постоянная $C_R < \frac{b^2}{n^2\sqrt{m}}\varepsilon_{\max}^{n-1}$, где $\varepsilon_{\max} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n\sqrt{n-1}}\frac{b^2}{\|A\|}$, то все интегральные кривые системы* (1), *выходящие из точек шара $|x| \leqslant \rho_x = \varepsilon_{\max}^{n-1}R$, будут O^+-кривыми, находящимися при $t \geqslant 0$ в шаре $|x| < R$.*

Метод доказательства следующий. Распространяем определение правых частей системы на всю комплексную плоскость, именно, вместо системы (1) рассматриваем систему

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}w_k + f_i(t, \operatorname{Re} w_1, \ldots, \operatorname{Re} w_n). \tag{1'}$$

Далее при помощи унитарного преобразования приводим линейные части системы (1′) к треугольной форме

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n + \psi_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_n y_n + \psi_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Над системой (2) производим преобразование переменных

$$y_k = \varepsilon^{k-1}z_k, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

После преобразования получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + \varepsilon b_{12}z_2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}b_{1n}z_n + \psi_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dz_n}{dt} &= \lambda_n z_n + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\psi_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Для системы (3) обычным в теории устойчивости по Ляпунову методом получаем оценку

$$\frac{d|z|^2}{dt} \leqslant 2\left[-b^2 + n\sqrt{n-1}\,\|A\|\varepsilon + \frac{C_R}{\varepsilon^{n-1}}\,n\sqrt{m}\right]|z|^2, \tag{4}$$

определяем C_R неравенством

$$C_R < \frac{b^2\varepsilon^{n-1} - n\sqrt{n-1}\,\|A\|\varepsilon^n}{n\sqrt{m}} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{n\sqrt{m}}$$

и выбираем так величину $\varepsilon_{\max}$, чтобы $\varphi(\varepsilon_{\max})$ достигала максимального значения внутри интервала $0 < \varepsilon < 1$. Полученная для C_R оценка, как легко убедиться простыми рассуждениями, и будет искомой.

Если заранее предположить, что исходная система имеет вид (2), то оценка улучшается и имеет место теорема 2. Вводим обозначение $\|B'\| = \sqrt{\sum_{\substack{i,k \\ k<i}} b_{ik}^2}$.

Теорема 2. *Если для всех y-в, для которых* $|y| \leqslant R$, *константа*

$$C_R < \min\left\{\varepsilon_{\max}^{n-1}\frac{b^2}{n\sqrt{m}};\ \frac{b^2}{n\sqrt{m}}\right\},$$

где $\varepsilon_{\max} = \dfrac{n-1}{n\sqrt{n-1}}\dfrac{b^2}{\|B'\|}$, *все интегральные кривые системы* (2), *выходящие из точек шара* $|y| = \rho_R = \min\{\varepsilon_{\max}^{n-1}R, R\}$, *будут* O^+*-кривыми, находящимися для* $t \geqslant 0$ *в шаре* $|y| \leqslant R$.

Наконец, если матрица коэффициентов имеет диагональную форму, то соответствующие оценки имеют вид $C_R < \dfrac{b^2}{\sqrt{m}}$ и $\rho_R = R$, и стремление решений к нулю будет монотонным.

Оценки области устойчивости через константу C_R уже приводились в литературе (см., например, И. Г. Малкин [1] и П. В. Арташенок [2]), однако вычисления оценок этих авторов много сложнее и требуют знания большего числа параметров, характеризующих решения укороченной системы уравнений, чем вычисления указанных выше оценок.

Поступило
25 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Малкин, Приклади. матем. и мех., № 16, в. 4 (1952). [2] П. В. Арташенок, Вестн. Ленинградск. унив., № 8, сер. матем., физ. и хим. (1954).