Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. Е. ПЕНЗОВ

О ПУЧКАХ ОДНОМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В X_1^r КЛАССА $\geqslant 2$

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 VII 1955)

Пусть X_n^r — дифференцируемое многообразие класса r с допустимой системой координат (V_i, ψ_i); G — эффективная топологическая группа преобразований хаусдорфова пространства Y; $h(\xi)$ — гомоморфизм полной дифференциальной группы $\mathfrak{d}^{(v,n)}$ на группу G, определенный для всех $\xi \in X_n^r$, непрерывно зависящий от ξ. Тогда пучком геометрических объектов класса $\leqslant v$ $(v \leqslant r)$ над X_n^r типа $h(\xi)$ называется косое произведение с базисным пространством X_n^r, слоем Y, группой G и координатными преобразованиями g_{ji}, которые определяются равенствами $g_{ji}(\xi) = h(\xi)(x_{ji}(\xi))$, где $x_{ji}(\xi)$ — элемент $\mathfrak{d}^{(v,n)}$, определяемый значениями частных производных до порядка v включительно функций $\overset{-1}{\psi}_j \circ \psi_i$ в точке $\overset{-1}{\psi}_i(\xi)$ $(\xi \in V_i \cap V_j)$ (1, 2). Говорят, что класс пучка геометрических объектов равен v, если он является пучком класса $\leqslant v$ и не является пучком класса $\leqslant v-1$. Размерностью пучка геометрических объектов называется размерность слоя Y. Число измерений геометрического объекта, вообще говоря, не совпадает с числом компонент объекта в смысле теории В. В. Вагнера (3). Так, скаляры и несобственные скаляры будут однокомпонентными объектами, число измерений которых равно нулю, а несобственные объекты аффинной и проективной связности (см. ниже) являются одномерными объектами, число компонент которых равно двум.

В настоящей заметке находятся с точностью до эквивалентности все пучки транзитивных одномерных объектов класса $\geqslant 2$ над X_1^r постоянного типа h. Для этого надо найти все замкнутые подгруппы размерности $v-1$ полной дифференциальной группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$, при этом сопряженным подгруппам будут соответствовать эквивалентные пучки геометрических объектов.

Группа $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ есть группа Ли v измерений. Координатами элемента $x \in \mathfrak{d}^{(v,1)}$ являются произвольные действительные числа $x^1, x^2, \ldots, x^v$, первое из которых $x^1 \neq 0$. Операция умножения элементов $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ в координатах может быть выражена уравнениями:

$$z^h = \sum_{s=1}^{h} x^s \sum_{(i_1+\ldots+i_s=h)} y^{i_1} \cdots y^{i_s} \quad (x, y, z \in \mathfrak{d}^{(v,1)};\ z = xy). \qquad (1)$$

Единица e группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ имеет координаты $1, 0, \ldots, 0$. Компонента K единицы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ определяется условием:

$$K = \underset{(x)}{C}(x^1 > 0)\,^*. \tag{2}$$

Каждое из подмножеств $\mathfrak{N}^{(i)}$ группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$

$$\mathfrak{N}^{(i)} = \underset{(x)}{C}(x^1 = 1 \wedge x^2 = \ldots = x^i = 0) \tag{3}$$

есть ее нормальный делитель, совокупность которых образует строго убывающий нормальный ряд.

Структурные константы C_{ij}^k группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$, согласно (1), определяются равенствами

$$C_{ij}^k = (i - j)\,\delta_{i+j-1}^k. \tag{4}$$

Прежде всего, можно доказать, что все подалгебры размерности $v - 1$ для полной дифференциальной алгебры $D^{(v,1)}$, которая является алгеброй Ли для дифференциальной группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$, сопряжены с одной из подалгебр H_1, H_2, H_3:

$$H_1 = \underset{(a)}{C}(a^1 = 1); \quad H_2 = \underset{(a)}{C}(a^2 = 0); \quad H_3 = \underset{(a)}{C}(a^3 = 0). \tag{5}$$

Далее можно найти связные подгруппы компоненты K единицы группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$, соответствующие подалгебрам (5). Таковыми будут, соответственно:

$$\mathfrak{H}_1' = \underset{(x)}{C}(x^1 = 1); \quad \mathfrak{H}_2' = \underset{(x)}{C}(x^1 > 0 \wedge x^2 = 0);$$
$$\mathfrak{H}_3' = \underset{(x)}{C}\left(x^1 > 0 \wedge x^3 = \frac{(x^2)^2}{x^1}\right). \tag{6}$$

Подгруппы (6) являются компонентами единицы замкнутых подгрупп размерности $v - 1$ группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$. Так как $\mathfrak{H}_1' = \mathfrak{N}^{(1)}$, то все подгруппы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$, компонента единицы которых совпадает с $\mathfrak{H}_1'$, будут определять пучки геометрических объектов 1-го класса ([4]).

Пользуясь тем, что компонента единицы группы является ее замкнутым нормальным делителем ([5]), найдем, что произвольные подгруппы группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$, компоненты единицы которых совпадают с $\mathfrak{H}_2'$ и $\mathfrak{H}_3'$, определяются, соответственно, равенствами:

$$\mathfrak{H}_2 = \underset{(x)}{C}(x^2 = 0) \text{ и } \mathfrak{H}_3 = \underset{(x)}{C}\left(x^3 = \frac{(x^2)^2}{x^1}\right). \tag{7}$$

Так как $\mathfrak{H}_2' \supset \mathfrak{N}^{(2)}$ и $\mathfrak{H}_2' \not\supset \mathfrak{N}^{(1)}$ и, в то же время, $\mathfrak{H}_3' \supset \mathfrak{N}^{(3)}$ и $\mathfrak{H}_3' \not\supset \mathfrak{N}^{(2)}$, то пучки геометрических объектов, соответствующие подгруппам вида $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_3$, будут, соответственно, 2-го и 3-го класса. Среди подгрупп вида $\mathfrak{H}_2$ различимы две:

$$\mathfrak{H}_{21} = \mathfrak{H}_2' \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}_{22} = \mathfrak{H}_2' \cup x\mathfrak{H}_2', \tag{8}$$

где $x = (-1, 0, \ldots, 0)$. Среди подгрупп вида $\mathfrak{H}_3$ также различимы две:

$$\mathfrak{H}_{31} = \mathfrak{H}_3' \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}_{32} = \mathfrak{H}_3' \cup x\mathfrak{H}_3', \tag{9}$$

---

* Здесь и всюду в дальнейшем C есть символ абстракции, т. е. $\underset{(x)}{C}(x' > 0)$ есть множество всех элементов $x \in \mathfrak{d}^{(v,1)}$, у которых первая координата положительна.

где $x = (-1, 1, -1, 0, \ldots, 0)$. Все замкнутые подгруппы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ размерности $v-1$ сопряжены с одной из подгрупп (8), (9). Каждой из них будет соответствовать пучок транзитивных геометрических объектов одного измерения, слоем которого является фактор-пространство группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ по соответствующей подгруппе $\mathfrak{H}$ и группой которого является фактор-группа $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ по максимальному нормальному делителю $\mathfrak{H}_0$, содержащемуся в $\mathfrak{H}$ (2).

Вычисления приводят к следующим результатам:

1. Для пучка геометрических объектов, соответствующего подгруппе $\mathfrak{H}_{21}$, слой гомеоморфен объединению двух одномерных арифметических пространств $\alpha_1(\xi) \cup \alpha_1(\eta)$; группа изоморфна $\mathfrak{d}^{(2,1)}$, она действует на слое следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\xi}{x^1} + \frac{x^2}{(x^1)^2}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{x^1} + \frac{x^2}{(x^1)^2}, \quad \text{если } x^1 > 0, \\ \bar{\xi} &= \frac{\eta}{x^1} + \frac{x^2}{(x^1)^2}, \quad \bar{\eta} = \frac{\xi}{x^1} + \frac{x^2}{(x^1)^2}, \quad \text{если } x^1 < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Этот пучок объектов будем называть пучком несобственных одномерных объектов аффинной связности.

2. Для пучка геометрических объектов, соответствующего подгруппе $\mathfrak{H}_{22}$, слой гомеоморфен арифметическому пространству $\alpha_1(\xi)$, группа изоморфна $\mathfrak{d}^{(2,1)}$, которая действует на слое следующим образом:

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{x^1} + \frac{x^2}{(x^1)^2}. \tag{11}$$

Этот пучок называется пучком собственных одномерных объектов аффинной связности.

3. Для пучка геометрических объектов, соответствующего подгруппе $\mathfrak{H}_{31}$, слой гомеоморфен объединению двух одномерных арифметических пространств $\alpha_1(\xi) \cup \alpha_1(\eta)$; группа изоморфна двумерной группе Ли G_2, операция умножения в которой в координатах выражается следующим образом:

$$\begin{gathered} g^1 = g_1^1 g_2^1; \quad g^2 = g_1^2 (g_2^1)^3 + g_1^1 g_2^2 \\ (g_1, g_2, g \in G_2; \quad g = g_1 g_2; \quad g^1 \neq 0 \text{ для всех } g \in G_2). \end{gathered} \tag{12}$$

Гомоморфизм h группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ $(v \geqslant 3)$ на G_2 определяется условием: $g = h(x) \leftrightarrow \left(g^1 = x^1 \wedge g^2 = x^3 - \frac{(x^2)^2}{x^1}\right)$.

Группа G_2 действует на слое следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\xi}{(g^1)^2} + \frac{g^2}{(g^1)^3}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{(g^1)^2} + \frac{g^2}{(g^1)^3}, \quad \text{если } g^1 > 0, \\ \bar{\xi} &= \frac{\eta}{(g^1)^2} + \frac{g^2}{(g^1)^3}, \quad \bar{\eta} = \frac{\xi}{(g^1)^2} + \frac{g^2}{(g^1)^3}, \quad \text{если } g^1 < 0, \end{aligned} \tag{13}$$

а представление группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ $(v \geqslant 3)$ в виде группы гомеоморфизмов слоя имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\xi}{(x^1)^2} + \frac{x^3}{(x^1)^3} - \frac{(x^2)^2}{(x^1)^4}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{(x^1)^2} + \frac{x^3}{(x^1)^3} - \frac{(x^2)^2}{(x^1)^4}, \quad \text{если } x^1 > 0, \\ \bar{\xi} &= \frac{\eta}{(x^1)^2} + \frac{x^3}{(x^1)^3} - \frac{(x^2)^2}{(x^1)^4}, \quad \bar{\eta} = \frac{\xi}{(x^1)^2} + \frac{x^3}{(x^1)^3} - \frac{(x^2)^2}{(x^1)^4}, \quad \text{если } x^1 < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Этот пучок геометрических объектов будем называть пучком несобственных одномерных объектов проективной связности.

4. Для пучка геометрических объектов, соответствующего подгруппе $\mathfrak{H}_{32}$, слой гомеоморфен арифметическому пространству $\alpha_1(\xi)$, группа изоморфна подгруппе G_2' группы G_2, состоящей из всех элементов G_2, для которых $g^1 > 0$. Гомоморфизм h группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ $(v \geqslant 3)$ на G_2' определяется условием: $g = h(x) \leftrightarrow \left\{ g^1 = |x^1| \wedge g^2 = (\operatorname{sign} x^1)\left(x^3 - \frac{(x^2)^2}{x^1} \right) \right\}$.

Группа G_2' действует на слое следующим образом:

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{(g^1)^2} + \frac{g^2}{(g^1)^3}, \tag{15}$$

а представление группы $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ $(v \geqslant 3)$ в виде группы гомеоморфизмов слоя имеет вид:

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{(x^1)^2} + \frac{x^3}{(x^1)^3} - \frac{(x^2)^2}{(x^1)^4}. \tag{16}$$

Этот пучок геометрических объектов называется пучком собственных одномерных объектов проективной связности.

Заметим, что несобственные объекты аффинной и проективной связности с точки зрения теории геометрических объектов В. В. Вагнера являются непростыми двухкомпонентными объектами 2-го и 3-го классов, соответственно вмещающимися в следующие представления $\mathfrak{d}^{(v,1)}$ в двумерном арифметическом пространстве $\alpha_2(\xi^1, \xi^2)$:

$$\begin{aligned} &\bar{\xi}^1 = (\operatorname{sign} x^1)\,\xi^1, && \bar{\xi}^1 = (\operatorname{sign} x^1)\,\xi^1 \\ &\qquad\qquad \text{и} \\ &\bar{\xi}^2 = \frac{\xi^2}{x^1} + \frac{x^2}{(x^1)^2}, && \bar{\xi}^2 = \frac{\xi^2}{(x^1)^2} + \frac{x^3}{(x^1)^3} - \frac{(x^2)^2}{(x^1)^4}. \end{aligned} \tag{17}$$

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
29 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Стинрод, Топология косых произведений, 1953. [2] J. Haantjes, G. Laman, Konikl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 56, № 3 (1953). [3] В. В. Вагнер, Приложение к книге Веблен и Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, 1949. [4] В. В. Вагнер, ДАН, 69, № 3 (1949). [5] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1954.