Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. КРЫЛОВ

СХОДИМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ РАЗЛИЧНОГО ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 XII 1954)

Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок и $p(x)$ — неотрицательная, измеримая, не эквивалентная нулю функция, определенная на $[a, b]$. Будем рассматривать квадратурный процесс $\int_a^b p(x) f(x)\,dx \sim \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} f(x_{n,k})$, определяемый матрицей узлов $X = \| x_{n,k} \|$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ и матрицей коэффициентов $A = \| A_{n,k} \|$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$.

Говорят, что f принадлежит классу $C_r[a, b]$, если f r-кратно непрерывно дифференцируема на $[a, b]$.

Известны ([1,2]) требования, при которых квадратурный процесс будет сходиться в классе $C_0[a, b]$. Легко могут быть выяснены условия, которым должны удовлетворять X и A для того, чтобы можно было гарантировать сходимость квадратурного процесса при $n \to \infty$ для $f \in C_r[a, b]$ при любом r.

Условимся узлы $x_{n,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ нумеровать в порядке роста: $a \leqslant x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots \leqslant b$. Введем кусочно-постоянную функцию $F_{n,0}(x)$, характеризующую распределение узлов $x_{n,k}$ и значения соответствующих коэффициентов $A_{n,k}$:

$$F_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} E(x - x_{n,k}), \quad E(x) = {}^1/_2 (1 + \operatorname{sign} x).$$

Наряду с $F_{n,0}$ мы будем рассматривать первообразные функции $F_{n,r}$ для нее любых порядков r, удовлетворяющие начальным условиям $F_{n,r}^{(j)}(a) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, r - 1)$:

$$F_{n,r}(x) = \int_a^x F_{n,0}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} E(x - x_{n,k}) \frac{(x - x_{n,k})^r}{r!}. \qquad (1)$$

Теорема. *Для того чтобы квадратурный процесс при $n \to \infty$ сходился для всякой функции $f \in C_r[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы:* 1) *процесс сходился для всякого многочлена и* 2) *полные вариации первообразных функций порядка r $F_{n,r}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ были ограничены в совокупности.*

Если $f \in C_r[a, b]$, то остаток квадратуры для нее $R_n(f) = \int_a^b pf\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} f(x_{n,k})$ представим в форме

$$R_n(f) = \sum_{i=0}^{r-1} R[(x-b)^i] \frac{f^{(i)}(b)}{i!} +$$

$$+ (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right\} dt, \qquad (2)$$

что легко проверяется при помощи формулы Тейлора для f. Ввиду того, что для класса $C_r[a,b]$ числа $f^{(i)}(b)$ и непрерывная функция $f^{(r)}$ могут быть произвольными, стремление $R_n(f)$ к нулю при $n \to \infty$ равносильно соблюдению следующих условий:

$$R_n[(x-b)^i] \to 0, \quad n \to \infty \quad \text{при } i = 0, 1, \ldots, r-1; \qquad (3)$$

$$\Phi_n(f^{(r)}) = \int_a^b f^{(r)}(t) \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right\} dt \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (4)$$

На основании теоремы о сходимости линейных функционалов (см., например, ([3]), стр. 98—99) выполнение (4) для всякой непрерывной функции $f^{(r)}$ эквивалентно выполнению двух требований:

1. $\Phi_n(f^{(r)}) \to 0$, $n \to \infty$ для любого многочлена $f^{(r)}$, что, совместно с (3), означает, что квадратурный процесс должен сходиться для всякого многочлена.

2. Нормы функционалов $\Phi_n(f^{(r)})$ должны быть ограничены в совокупности

$$\| \Phi_n \| = \int_a^b \left| \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right| dt \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Так как $\int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx$ не зависит от n, выполнение (5) равносильно ограниченности интегралов $\int_a^b |F_{n,r-1}| dt$.

Но $F'_{n,r} = F_{n,r-1}$ и

$$\operatorname*{var}_{[a,b]} F_{n,r} = \int_a^b |dF_{n,r}| = \int_a^b |F_{n,r-1}| dt \leqslant N.$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Стеклов, Изв. Академии наук (6), 3, 169 (1916). [2] G. Polya, Math. Zs., 37, 264 (1933). [3] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6 (1948).