Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. КОРОВИН

СИСТЕМА R В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XII 1954)

Рассмотрим систему трех уравнений от трех переменных u, v, w:

$$\begin{aligned} X_{uv} &= a^1_{12} X_u + a^2_{12} X_v + a_{12} X, \\ X_{uw} &= a^1_{13} X_u + a^3_{13} X_w + a_{13} X, \\ X_{vw} &= a^2_{23} X_v + a^3_{23} X_w + a_{23} X, \end{aligned} \tag{1}$$

где X_u, X_v, X_w — производные по переменным u, v, w. Каждое из этих уравнений есть уравнение типа Лапласа.

Коэффициенты a^k_{ij} связаны 9 дифференциальными соотношениями, являющимися условиями интегрируемости системы (1).

Если рассмотреть преобразование

$$X = \rho X' \tag{2}$$

переменной X, то полученная система уравнений для переменной X' будет иметь другие коэффициенты, которые определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (1). Можно показать, что выражения

$$\begin{aligned} f_{12} &= a^1_{12} a^2_{12} + a_{12} - a^2_{12v}, \\ f_1 &= a^1_{12} - a^3_{23} \end{aligned} \tag{3}$$

(и еще 7 заменой индексов и букв) не меняются при преобразовании (2), т. е. являются инвариантами.

Заменяя коэффициенты a^k_{ij} в условиях интегрируемости на f_{ij}, f_i по формулам (3), получим 9 дифференциальных соотношений на инварианты f_{ij}, f_i. Переменная $X_{12} = X_u - a^2_{12} X$ (и еще 5 заменой индексов и букв) также удовлетворяет системе уравнений типа (1), называемой преобразованием Лапласа системы (1), причем ее инварианты определенным образом выражаются через инварианты системы (1).

Рассмотрим гиперповерхность в четырехмерном проективном пространстве, описанную точкой A_0 тетраэдра с вершинами A_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). Инфинитезимальные перемещения тетраэдра определяются уравнениями

$$dA_i = \omega^k_i A_k,$$

где ω^k_i — формы Пфаффа от дифференциалов трех главных параметров u, v, w.

Пусть гиперповерхность определяется уравнением

$$\omega^4_0 = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим на поверхности (4) трижды сопряженную систему линий. В этом случае таблица форм репера 1-го порядка будет иметь вид

$$\begin{gathered}\omega_1^2 = a_1^2\omega_0^1 + b_1^2\omega_0^2,\\ \omega_1^4 = a_1^4\omega_0^1\end{gathered} \tag{5}$$

(и еще 7 уравнений заменой индексов и букв).

Дифференцируя внешним образом систему (5), получим таблицу форм для репера 2-го порядка:

$$\begin{gathered}\Delta a_1^2 = \alpha_{12}\omega_0^1 + \beta_{12}\omega_0^2,\\ \Delta b_1^2 = \beta_{12}\omega_0^1 + \gamma_{12}\omega_0^2,\\ \Delta a_1^4 = \alpha_{14}\omega_0^1\end{gathered} \tag{6}$$

(и еще 12 уравнений заменой индексов и букв), где

$$\Delta a_1^2 = a_1^2(2\omega_1^1 - \omega_0^0 - \omega_2^2) - da_1^2 - a_1^4\omega_4^2 - (a_1^2a_2^1 + a_1^3b_3^2)\omega_0^2 - (a_1^3c_3^2 + a_1^2a_3^1)\omega_0^3,$$

$$\Delta b_1^2 = b_1^2(\omega_1^1 - \omega_0^0) - db_1^2 + \omega_1^0 + b_3^2(c_1^3 - b_1^2)\omega_0^3 - (b_1^2)^2\omega_0^1,$$

$$\Delta a_1^4 = a_1^4(2\omega_1^1 - \omega_4^4 - \omega_0^0) - da_1^4 - (b_2^4a_1^2 + a_1^4a_2^1)\omega_0^2 - (c_3^4a_1^3 + a_1^4a_3^1)\omega_0^3.$$

Если положить

$$\begin{gathered}\omega_i^k = a_i^k du + b_i^k dv + c_i^k dw,\\ \omega_0^1 = a_0^1 du, \quad \omega_0^2 = b_0^2 dv, \quad \omega_0^3 = c_0^3 dw\end{gathered} \tag{7}$$

и написать уравнение поверхности, описываемой точкой A_0, в частных производных, то получится система 3 уравнений вида (1), причем инварианты этой системы имеют вид:

$$f_{12} = a_0^1 b_0^2 \gamma_{12}, \quad f_1 = (b_1^2 - c_1^3)\, a_0^1 \tag{8}$$

(и еще 7 инвариантов заменой индексов и букв).

Рассмотрим перемещение аналитической касательной плоскости $d(A_0A_1A_2A_3)$; тогда можно перейти к тангенциальным координатам, и если написать уравнение плоскости в частных производных, то будем иметь также систему 3 уравнений типа (1). Инварианты этой системы имеют вид

$$\begin{gathered}F_{21} = a_0^1 b_0^2 \frac{b_2^4}{(a_1^4)^2}(a_1^2\alpha_{14} - a_1^4\alpha_{12}),\\ F_1 = a_0^1 a_1^4 \left(\frac{c_3^1}{c_3^4} - \frac{b_2^1}{b_2^4}\right)\end{gathered} \tag{9}$$

(еще 7 инвариантов заменой индексов и букв).

Теорема 1. *Если имеют место соотношения между точечными и тангенциальными инвариантами поверхности* (A_0):

$$\begin{gathered}f_{12} = F_{21} = -f_1F_2; \quad f_{13} = F_{31} = f_1F_3;\\ f_{21} = F_{12} = f_2F_1; \quad f_{23} = F_{32} = f_2F_3;\\ f_{31} = F_{13} = f_3F_1; \quad f_{32} = F_{23} = f_3F_2,\end{gathered} \tag{10}$$

то такие же соотношения имеют место и для всех преобразований Лапласа исходной поверхности.

Теорема существования 2. *Трижды сопряженная система в четырехмерном проективном пространстве с соотношениями* (10) *на коэффициенты репера существует.*

Если написать систему дифференциальных уравнений, определяющую трижды сопряженную систему, и к ней присоединить первые 4 *соотношения* (10), *то остальные* 8 *будут следовать из условий интегрируемости этой системы.*

Решение системы существует и зависит от 15 *произвольных постоянных.*

Геометрический смысл. Назовем на поверхности (A_0) направление асимптотическим, если трехмерная соприкасающаяся плоскость его совпадает с трехмерной касательной плоскостью поверхности (A_0).

Такие направления определяются соотношением

$$a_1^4(\omega_0^1)^2 + b_2^4(\omega_0^2)^2 + c_3^4(\omega_0^3)^2 = 0, \tag{11}$$

т. е. мы имеем конус асимптотических направлений. Если имеют место соотношения (10), то асимптотические направления на первых 6 преобразованиях Лапласа определяются тем же уравнением (11).

На основании теоремы 1 заключаем, что и на всех преобразованиях Лапласа конусы асимптотических направлений совпадают.

Если к соотношениям (10) добавить еще

$$f_{12} = f_{21} = f_1 f_2, \quad f_{13} = f_{31} = -f_1 f_3, \quad f_{23} = f_{32} = f_2 f_3, \tag{12}$$

то на поверхности (A_0) образуется трижды сопряженная сеть с равными точечными инвариантами.

Аналогичные соотношения автоматически получатся и для тангенциальных координат.

Теорема 3. *Если на поверхности* (A_0) *имеют место соотношения* (10) *и* (12), *то такие же соотношения имеют место и для всех преобразований Лапласа поверхности* (A_0).

Теорема 4. *Трижды сопряженная система в четырехмерном пространстве с соотношениями* (10) *и* (12) *существует.*

Решение системы дифференциальных уравнений, определяющих указанную трижды сопряженную систему, зависит от 12 произвольных постоянных.

Московский институт
инженеров железнодорожного транспорта
им. И. В. Сталина

Поступило
18 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948.