Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИКА

И. Л. КАРОЛЬ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 XII 1954)

1. В работе ([1]) исследовались краевые задачи для уравнения:

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \qquad (S)$$

(α — вещественная постоянная) в области, где это уравнение имеет смешанный тип и для случая $\alpha < 0$. В настоящей заметке приводятся результаты изучения некоторых краевых задач уравнения (S) для случая $\alpha > 0$.

Решение уравнения (S) определяем в области Ω, ограниченной: 1) конечным числом простых кривых $\{\Gamma_k\} = \Gamma$, $k = 0, 1, \ldots, n$, лежащих целиком в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $P_i(x_i, 0)$ $(i = 0, 1, \ldots, 2n+1)$ оси Ox, причем Γ_0 лежит вне кривых Γ_k; 2) в полуплоскости $y < 0$ — отрезками характеристик уравнения (S) $\xi = x_{2k}$, $\eta = x_{2k+1}$ разных семейств, выходящих из точек P_{2k}, P_{2k+1}, до точек их пересечения Q_k, где $\xi = x - 2\sqrt{-y}$, $\eta = x + 2\sqrt{-y}$.

Пусть Ω_+ (Ω_-) — часть области Ω, лежащая в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$); $L = \{L_k\}$ — множество отрезков $L_k = (x_{2k}, x_{2k+1})$ оси Ox. Если θ_i — угол кривой Γ_k с положительным направлением оси Ox в точке P_i, то считаем $\theta_{2k} > 0$, $\theta_{2k+1} < \pi$.

Пусть ω_+ (ω_-) — область, лежащая целиком в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) и имеющая множество l открытых отрезков оси Ox частью своей границы. Решения $u(x, y)$ уравнения (S), определенные в ω_+ и такие, что существуют

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0+)} u_{xx} = \tau_+''(x_0); \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,0+)} u_y = \nu_+(x_0); \quad x_0 \in l,$$

где $\tau_+''(x)$ и $\nu_+(x)$ непрерывны в l ($\tau_+''(x) \in Cl$, $\nu_+(x) \in Cl$) и при всех $x \in l$ $\tau_+''(x) + \alpha\nu_+(x) = 0$, объединим в класс $S_\alpha^+ l$. Аналогично определяется класс $S_\alpha^- l$ в области ω_-. Решения $u(x, y)$, определенные в $\omega = \omega_+ + \omega_-$ и такие, что $u \in S_\alpha^+ l$, $u \in S_\alpha^- l$ и $\tau_+''(x) = \tau_-''(x)$ в точках l, составят класс $S_\alpha l$. Эти решения удовлетворяют в точках множества l оси Ox — характеристики уравнения S — характеристическому соотношению $\tau''(x) + \alpha\nu(x) = 0$, где $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$.

2. Рассмотрим следующие краевые задачи для уравнения (S).

Задача E_1. В области Ω найти функцию $u(x, y)$ такую, что: 1) u непрерывна в $\overline{\Omega}$ ($u \subset C\overline{\Omega}$); 2) u дважды непрерывно дифференцируема в Ω_+ и Ω_- ($u \in C^{(2)}(\Omega_+ + \Omega_-)$) и удовлетворяет там уравнению (S); 3) u_y ограничена в окрестности точек L; 4) в точках $\overline{\Gamma} = \Gamma + \{P_i\}$ u принимает заданные непрерывные краевые значения:

$$u|_{\overline{\Gamma}} = \varphi; \quad \varphi \in C\overline{\Gamma}. \qquad (1)$$

Задача E_2. В Ω найти $u(x, y)$ такую, что: 1) $u \in C\overline{\Omega}$ кроме, может быть, точек $\{P_i\}$, но $u(x, y)$ ограничена в Ω; 2) $u \in C^{(2)}(\Omega_+ + \Omega_-)$ и удовлетворяет там уравнению (S); 3) в точках Γ u удовлетворяет краевому условию:

$$u|_\Gamma = \varphi; \quad \varphi \in C\overline{\Gamma}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Решение задачи* E_1 *единственно при* $\alpha > 0$, *существует при* $0 < \alpha < 1$ *и принадлежит классу* $S_\alpha L$.

Теорема 2. *Решение задачи* E_2 *единственно и существует при* $\alpha \geqslant 1$ *и принадлежит классу* $S_\alpha L$. *Если кривые* Γ_k *составляют с осью* Ox *в точках* $\{P_i\}$ *углы, отличные от* 0 *и* π, *то решение задачи* E_2 *непрерывно в* $\overline{\Omega}$, *удовлетворяет краевому условию* (1) *и является решением задачи* E_1.

Укажем ход доказательства обеих теорем. Сначала в области Ω_+ рассмотрим следующие краевые задачи:

Задача E_1^+. Найти непрерывное в $\overline{\Omega}_+$ решение уравнения (S), удовлетворяющее условиям 3) и 4) задачи E_1.

Задача E_2^+. Найти ограниченное в Ω_+ решение $u_+(x, y)$ уравнения (S) такое, что $u_+ \in C(\Omega_+ + \Gamma)$ и удовлетворяет краевому условию (2).

Единственность и существование решения задачи E_2^+ были доказаны М. В. Келдышем ([2]) для уравнения, частным случаем которого является уравнение (S) при $\alpha \geqslant 1$. Аналогичным приемом устанавливается и единственность решения задачи E_1^+ при $\alpha > 0$.

Если Ω_+^0 есть область, ограниченная дугой «нормальной кривой» Γ_0: $4y = x(1-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ и отрезком $AB\,[0,1]$ оси Ox, то решение задачи E_1^+ в Ω_+^0 с краевым условием

$$u|_{\Gamma_0} = \chi(x); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad \chi(x) \in C\,[0,1] \tag{3}$$

можно получить при $\alpha > 0$ в явном виде, именно:

$$U(x, y) = \int_0^1 \chi(x')\, H_\beta(x', y', x, y)\, dx', \tag{4}$$

где $4y' = x'(1-x')$, $\beta = \alpha - 0{,}5$; $\beta > -0{,}5$,

$$H_\beta(x', y', x, y) =$$

$$= k_\beta (16y')^{\alpha-1} [x(1-x) - 4y] r_1^{-2\beta-2} F(\beta, \beta + 1{,}2\beta, 16\sqrt{yy'}\, r_1^{-2}) \quad \text{при } \beta \neq 0;$$

$$H_0(x', y', x, y) = \pi^{-1} (16y')^{-1/2} [x(1-x) - 4y] (r^{-2} + r_1^{-2}) \quad \text{при } \beta = 0;$$

$$k_\beta = \frac{\beta \Gamma^2(\beta)}{\pi \Gamma(2\beta)}; \qquad \left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x - x')^2 + 4(\sqrt{y} \mp \sqrt{y'})^2.$$

Если в условии (3) считать, что $\chi(x) \in C(0, 1)$ и ограничена на $[0, 1]$, то из (4) следует, что $U \in C\overline{\Omega}_+^0$ кроме точек A и B, но U ограничена в Ω_+^0. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $U(x, y) \in S_\alpha^+(0, 1)$.

Лемма 1. *Решение* $u_+(x, y)$ *задачи* E_2^+ *в области* Ω_+ *принадлежит классу* $S_\alpha^+ L$. *Если кривые* Γ_k *не касаются оси* Ox *в точках* $\{P_i\}$, *то* $u_+(x, y)$ *непрерывна в этих точках и, следовательно, является решением задачи* E_1^+.

В области $\omega_{x_0\delta} \subset \Omega_+$, ограниченной дужкой нормальной кривой $\gamma_{x_0\delta}$, заданной уравнением $(x-x_0)^2+4y=\delta^2$, $\delta>0$, $y>0$ ($x_0 \in L$ — произвольная точка), и отрезком $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ оси Ox, рассмотрим функцию

$$u_{x_0\delta}(x,\ y)=U(0{,}5+(x-x_0)/\delta,\ y/\delta^2), \tag{5}$$

где $U(x,\ y)$ определяется выражением (4). Положим $u_{x_0\delta} \equiv u_+$ вдоль кривой $\gamma_{x_0\delta}$. Очевидно, $u_{x_0\delta}(x,\ y)$ есть непрерывное в $\omega_{x_0\delta}$, кроме точек $(x_0-\delta,\ 0)$, $(x_0+\delta,\ 0)$, и ограниченное в $\omega_{x_0\delta}$ решение уравнения (S) и, в силу единственности решения задачи E_2^+, $u_{x_0\delta}(x,\ y) \equiv u_+(x,\ y)$ в $\omega_{x_0\delta}$. Так как $u_{x_0\delta} \in S_\alpha^+(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, то $u_+(x,\ y) \in S_\alpha^+ L$. Второе утверждение леммы доказывается обычным способом при помощи «барьера» (см. [3], теорема 3).

Идея доказательства существования решения задачи E_1^+ для общей области Ω_+ и при $0<\alpha<1$ такова. Из множества $\{u(x,\ y)\}$ непрерывных в $\bar{\Omega}_+$ решений задачи Дирихле уравнения (S), при $0<\alpha<1$, удовлетворяющих условию (1) на Γ и принимающих произвольные значения $\{u(x,\ 0)\}=\{\tau(x)\}$ на L *, методом, аналогичным известному методу Шварца с использованием решений вида (5), находим функцию $u_+(x,\ y)$, входящую в класс $S_\alpha^+ L$, — искомое решение задачи E_1^+.

Пусть $\tau(x)=u_+(x,\ 0)$ — значение решения задачи E_1^+ или E_2^+ в точках L. Легко показать, что $\tau(x) \in C^{(2)}L$.

Решение задачи E_1^+ или E_2^+ можно непрерывно продолжить в область Ω_-. Для этого определим в Ω_- решение $u_-(x,\ y)$ уравнения (S) такое, что: 1) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ 0-)} u_-(x,\ y)=\tau(x_0)$, $x_0 \in L$, $\alpha>0$; 2) u_{-y} ограничена в окрестности точек L при $0<\alpha<1$, где $\tau(x) \in C^{(2)}L$ и $\tau(x) \in C(L+\{P_i\})$. Единственное решение, удовлетворяющее этим условиям, имеет вид: при $0<\alpha \leqslant 0{,}5$

$$u_-(x,\ y)=\varkappa_1 \int_0^1 \tau(t)\lambda^\beta(1-\lambda)^\beta d\lambda - \varkappa_1 \alpha^{-1}\sqrt{-y}\int_0^1 \tau'(t)\lambda^\beta(1-\lambda)^\beta(1-2\lambda)\,d\lambda, \tag{6}$$

или еще при $\alpha=0{,}5$

$$2u_-(x,\ y)=\tau(x-2\sqrt{-y})+\tau(x+2\sqrt{-y}) \tag{7}$$

и при $\alpha>0{,}5$

$$u_-(x,\ y)=\varkappa_2 \int_0^1 \tau(t)\lambda^{\beta-1}(1-\lambda)^{\beta-1}d\lambda. \tag{8}$$

Здесь

$$t=x+2\sqrt{-y}(2\lambda-1);\quad \varkappa_1=\Gamma(2\beta+2)\Gamma^{-2}(\beta+1);\quad \varkappa_2=\Gamma(2\beta)\Gamma^{-2}(\beta).$$

Нетрудно проверить, что $u_-(x,\ y) \in C\bar{\Omega}_-$ и $u_-(x,\ y) \in S_\alpha^- L$.

Если в выражении (8) считать $\tau(x) \in C^{(2)}L$ и $\tau(x)$ ограничена на L, то $u_-(x,\ y) \in C\bar{\Omega}_-$ кроме точек $\{P_i\}$, но $u_-(x,\ y)$ ограничена в Ω_-. Для завершения доказательства теорем остается заметить, что

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ 0+)} u_{+xx} = \lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ 0-)} u_{-xx} = \tau''(x_0),\quad x_0 \in L.$$

---

* Существование решения этой задачи для уравнения (S) при $\alpha<1$ было установлено в [2].

Теорема 3. *Решение* $u(x, y)$ *задачи* E_1 *уравнения* (S) *при* $\alpha \geqslant 0{,}5$ *принимает свои наибольшее и наименьшее в* $\bar{\Omega}$ *значения на кривых* $\bar{\Gamma}$, *т. е. при всех* $(x, y) \in \bar{\Omega}$ *имеет место неравенство:*

$$\min_{\bar{\Gamma}} \varphi \leqslant u(x, y) \leqslant \max_{\bar{\Gamma}} \varphi. \tag{9}$$

Сначала это неравенство устанавливается для решения $u_+(x, y)$ задачи E_1^+ в области Ω_+ при $\alpha > 0$ и, в частности, для $\tau(x) = u_+(x, 0)$ на L. Далее утверждение теоремы получается из очевидного для решений (7) и (8) неравенства

$$\min_{\bar{L}} \tau(x) \leqslant u_-(x, y) \leqslant \max_{\bar{L}} \tau(x).$$

3. Можно поставить еще такую краевую задачу для уравнения (S) в области Ω.

Задача O. В Ω найти $u(x, y)$ такую, что: 1) $u \in C\bar{\Omega}$ кроме, может быть, точек $\{P_i\}$, но u ограничена в Ω; 2) $u \in C^{(2)}(\Omega_+ + \Omega_-)$ и является там решением (S); 3) $u \in C^{(1)}(\Omega_+ + \Gamma)$; 4) в точках Γ u удовлетворяет краевому условию:

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \mu u = \varphi, \tag{10}$$

где направление γ составляет острый угол с внутренней нормалью к Γ; μ и φ — функции, заданные на $\bar{\Gamma}$.

Пусть $\{P_i\}^* \subset \{P_i\}$ — множество точек, в которых направление γ составляет тупой угол с осью Oy.

Теорема 4. *Если*: 1) $\alpha \geqslant 1$; 2) Γ *есть множество кривых Ляпунова*; 3) $\mu < 0$ *на* $\bar{\Gamma}$; 4) μ, φ *и компоненты* γ *как функции длины дуги непрерывно дифференцируемы на* Γ; 5) *множество* $\{P_i\}^*$ *пусто, то решение задачи* O *существует, единственно и входит в класс* $S_\alpha L$.

Для доказательства, как и выше, в области Ω_+ рассмотрим краевую задачу O^+.

Задача O^+. Найти ограниченное в Ω_+ решение $u_+(x, y)$ уравнения (S) такое, что $u_+ \in C^{(1)}(\Omega_+ + \Gamma)$ и удовлетворяет краевому условию (10) на Γ.

В условиях теоремы существование и единственность решения этой задачи были установлены О. А. Олейник ([3]). Тем же способом, как в лемме 1, доказывается, что $u_+ \in S_\alpha^+ L$ и непрерывна вплоть до точек L.

Значение решения задачи O в области Ω_- определяется выражением (8), где $\tau(x) = u_+(x, 0)$ на L.

Аналогично, с учетом результатов работы ([3]), доказывается

Теорема 5. *Если множество* $\{P_i\}^*$ *не пусто, то при выполнении условий* 1) — 4) *теоремы* 4 *существует, единственно и входит в класс* $S_\alpha L$ *решение задачи* O, *непрерывное в точках* $P_i(x_i, 0) \in \{P_i\}^*$ *и принимающее в этих точках произвольные заданные значения.*

Свердловский государственный
педагогический институт

Поступило
25 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Л. Кароль, ДАН, **88**, № 3, 397 (1953). [2] М. В. Келдыш, ДАН, **77**, № 2, 181 (1951). [3] О. А. Олейник, ДАН, **87**, № 6, 885 (1952).