Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИКА

М. А. ЕВГРАФОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА АБЕЛЯ — ГОНЧАРОВА ДЛЯ УЗЛОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ДАННОМ ЛУЧЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 XII 1954)

Пусть $\lambda(n)$ — некоторая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\frac{\lambda'(n)}{\lambda(n)} = \frac{1}{\rho}$.

Мы приведем условия сходимости интерполяционного ряда

$$\sum^{\infty} F^{(n)}[\lambda(n)]\,P_n(z), \quad P_n(z) = \int_{\lambda(0)}^{z}\int_{\lambda(1)}^{z_1}\cdots\int_{\lambda(n-1)}^{z_{n-1}} dz_1\ldots dz_n \qquad (1)$$

к интерполируемой функции $F(z)$.

Рассмотрим сначала случай $\rho<1$. Положим

$$\Gamma_{\lambda(n)}(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{c\lambda(n)}\right), \quad c = \left(\frac{\sin\pi\rho}{\pi}\right)^{1/\rho}.$$

Считая, что $\Gamma_{\lambda(n)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{m_k}$, мы назовем функцию $f(\zeta)$ $\Gamma_{\lambda(n)}$-ассоциированной с целой функцией $F(z)$, если

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{m_n}z^n, \quad f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^{n+1}}.$$

Теорема 1. *Если функция $f(\zeta)$, $\Gamma_{\lambda(n)}$-ассоциированная с целой функцией $F(z)$, регулярна вне области D_ρ, где $D_\rho \ni 0$ — связная часть множества точек, удовлетворяющих условию*

$$|\zeta_\rho(z)| < \frac{\rho}{c},$$

$$\zeta_\rho(z) = w_\rho(z)\exp\frac{w_\rho(z)}{\rho}, \quad z = \rho^{-\frac{1}{\rho}}w_\rho(z)\,[1+w_\rho(z)]^{\frac{1}{\rho}-1}, \quad w_\rho(0)=0,$$

то интерполяционный ряд (1) сходится к $F(z)$ равномерно в любой конечной части плоскости.

Для $\rho\geqslant 1$ положим

$$E_{\lambda(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\mu(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

где L — контур, концы которого уходят в бесконечность в углах $\frac{\pi}{\rho} > \varphi > \frac{\pi}{2\rho}$, $-\frac{\pi}{\rho} < \varphi < -\frac{\pi}{2\rho}$, а

$$\mu(\zeta) = \zeta^{\rho} \int_0^{\infty} \frac{\mu_1(x)}{x^{\rho}} \frac{dx}{(x+\zeta)^2}, \quad \mu_1(\lambda(x)) = x.$$

Считая, что $E_{\lambda(n)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m_n}$, мы назовем функцию

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^{n+1}}$$

$E_{\lambda(n)}$-ассоциированной с целой функцией

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m_n} z^n.$$

Теорема 2. *Если функция $f(\zeta)$, $E_{\lambda(n)}$-ассоциированная с целой функцией $F(z)$, регулярна вне области D_ρ, где $D_\rho \ni 0$ — связная часть множества точек, удовлетворяющих условию*

$$|\zeta_\rho(z)| < e^{-\frac{1}{\rho}},$$

$$\zeta_\rho(z) = w_\rho(z) \exp \frac{w_\rho(z)}{\rho}, \quad z = \rho^{-\frac{1}{\rho}} w_\rho(z)[1 + w_\rho(z)]^{\frac{1}{\rho}-1}, \quad w_\rho(0) = 0,$$

то интерполяционный ряд (1) *сходится к $F(z)$ равномерно в любой конечной части плоскости.*

Область D_ρ невозможно увеличить. В общем случае это означает, что для любой области $D \supset D_\rho$ найдется функция $F(z)$ такая, что функция $f(\zeta)$, $\Gamma_{\lambda(n)}$- или $E_{\lambda(n)}$-ассоциированная с ней, регулярна вне D, а в то же время ряд (1) расходится или сходится к сумме, отличной от $F(z)$.

Для случая $\lambda(n) = n^{1/\rho}$ это утверждение можно значительно усилить.

Теорема 3. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z), \quad P_n(z) = \int_1^z \int_{2^{1/\rho}}^{z_1} \dots \int_{n^{1/\rho}}^{z_{n-1}} dz_1 \dots dz_n$$

сходится со скоростью геометрической прогрессии, т. е. при любом R

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} \max_{|z|\leqslant R} |P_n(z)|^{1/n} < 1,$$

то функция $f(\zeta)$ $\Gamma_{\lambda(n)}$- или $E_{\lambda(n)}$-ассоциированная с его суммой, регулярна вне области D_ρ.

Кроме того, для $\lambda(n) = n^{1/\rho}$ можно получить и теоремы единственности, отличные от теорем сходимости интерполяционного ряда.

Положим

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}.$$

Функцию $f(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^{n+1}}$ мы будем называть E_ρ-ассоциированной с целой функцией $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}$.

Через A_ρ обозначим область, ограниченную кривыми

$$z_1(t)=e^{\frac{\pi i}{2\rho}}\left(t+\frac{it^{1-\rho}}{\rho}\right),\quad t>0,$$

$$z_2(t)=e^{-\frac{\pi i}{2\rho}}\left(t-\frac{it^{1-\rho}}{\rho}\right),\quad t>0,$$

и содержащую положительную часть действительной оси.

Теорема 4. *Если функция $f(\zeta)$, E_ρ-ассоциированная с целой функцией $F(z)$, регулярна вне области $D\ni 0$, $D\subset A_\rho$, в которой функция $\zeta_\rho(z)$ однолистна, то из условий*

$$F^{(n)}(n^{1/\rho})=0,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

следует $F(z)\equiv 0$.

Теорема 5. *Если область D, $D\ni 0$, $D\subset A_\rho$, содержит две точки z_1 и z_2 такие, что $\zeta(z_1)=\zeta(z_2)$, то существует функция $F(z)\not\equiv 0$, E_ρ-ассоциированная с которой регулярна вне D, и*

$$F^{(n)}(n^{1/\rho})=0,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Методы доказательств близки к методам, примененным в [1-4].

Московский
физико-технический институт

Поступило
6 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Евграфов, Изв. АН СССР, **17**, 421 (1953). [2] М. А. Евграфов, Изв. АН СССР, **18**, сер. матем., 201 (1954). [3] М. А. Евграфов, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, 449 (1954). [4] М. А. Евграфов, Интерполяционная задача Абеля — Гончарова, М. — Л., 1954.