Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

МАТЕМАТИКА

С. И. МЕЛЬНИК

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 IV 1955)

В предлагаемой работе даются оценки бигармонической функции W и ее производных до второго порядка включительно по заданным на границе значениям

$$W|_\Gamma = f_1(s), \quad \left.\frac{dW}{dn}\right|_\Gamma = f_2(s).$$

Ограничения. Область B полагаем плоской, конечной, односвязной. Граница Γ_B области B имеет непрерывно меняющуюся кривизну $1/\rho(s)$. Пусть длина граничной кривой будет l; начало координат помещаем внутри области; пусть

$$\left.\frac{dR}{dn}\right|_{\Gamma_B} = \cos(R, n) \neq 0,$$

где $R^2 = x^2 + y^2$. Относительно функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$ полагаем:

$$\int_0^l f_1^2(s)\,ds = M, \quad \int_0^l [f_1'(s)]^2 ds = M_1, \quad \int_0^l f_2^2(s)\,ds = M_2.$$

Предполагается известной оценка снизу для k — минимума интегральной формы:

$$k = \min_{(\varphi,\varphi)=1} \int_0^l\int_0^l K(s, s_0)\,\varphi(s)\,\varphi(s_0)\,ds\,ds_0,$$

где

$$K(s, s_0) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_p}\ln\frac{1}{r_{pq}}, \quad p, q \in \Gamma_B$$

(для внутренних точек будем употреблять заглавные буквы). Предполагается известной оценка сверху для

$$N = \min \frac{\max\limits_{z\in\Gamma_B} |f'(z)|}{\min\limits_{z\in\Gamma_B} |f'(z)|},$$

где $f(z)$ — функция, отображающая конформно область B на круг A радиуса единица, min берется при всевозможных таких отображениях.

Определения. Справки. а) Ядро $H(s, s_0)$ назовем антисимметричным, если $H(s, s_0) = -H(s, s_0)$. В случае антисимметричного ядра легко получается оценка в L_2 решения $\mu(s)$ интегрального уравнения

$$\mu(s) = f(s) + \int_0^l H(s, s_0)\,\mu(s_0)\,ds_0. \qquad (1)$$

Действительно, умножив уравнение (1) на $\mu(s)$ и выполнив интегрирование, будем иметь $(\mu, \mu) = (f, \mu)$, откуда получаем

$$(\mu, \mu) \leqslant (f, f). \tag{2}$$

б) Относительно ядра $K(s, s_0)$ известно [1]: все характеристические числа ядра вещественны; на полусегменте $[-1, 1)$ характеристических чисел нет; для ядра $K(s, s_0)$ в случае выпуклой границы известна оценка

$$\min \frac{1}{2\pi\rho(s)} \leqslant K(s, s_0) \leqslant \max \frac{1}{2\pi\rho(s)}.$$

Иногда для k можно получить хорошую оценку непосредственно. Положим

$$\bar{k} = \min_{(\varphi,\varphi)=1} \int_0^l \int_0^l [K(s, s_0) - K_1(s, s_0)]\, \varphi(s)\, \varphi(s_0)\, ds\, ds_0,$$

где $K_1(s, s_0)$ — положительно-определенное ядро. Очевидно, $\bar{k} \leqslant k$. Возьмем

$$K_1(s, s_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\min \frac{1}{2\rho(s)} + \max \frac{1}{2\rho(s)}\right],$$

тогда получим оценку

$$|k| \leqslant \frac{l}{4\pi}\left[\max \frac{1}{\rho(s)} - \min \frac{1}{\rho(s)}\right].$$

Для некоторых областей, например для круга, $k = 0$.

Имея оценку для k, легко получить оценку в L_2 решения интегрального уравнения

$$\mu(s) = \frac{f(s)}{\pi} - \int_0^l K(s, s_0)\, \mu(s_0)\, ds_0. \tag{3}$$

Для этого достаточно умножить уравнение (3) на $\mu(s)$ и выполнить интегрирование, после чего получим

$$(\mu, \mu) \leqslant \frac{1}{\pi^2 (1-k)^2} (f, f). \tag{4}$$

в) Построим гармоническую функцию v такую, что $v|_{\Gamma_B} = f_1(s)$, и положим $W_1 = W - v$. Очевидно, для бигармонической функции W_1 будем иметь на границе

$$W_1\Big|_{\Gamma_B} = 0, \qquad \frac{dW_1}{dn}\Big|_{\Gamma_B} = f_2(s) - \frac{dv}{dn}\Big|_{\Gamma_B} = \theta(s).$$

В пространстве L_2 для функций $\theta(s)$ будем иметь оценку

$$\left[\int_0^l \theta^2(s)\, ds\right]^{1/2} \leqslant M_2 + M_1\sqrt{N}, \tag{5}$$

которую можно получить следующим образом: если область есть круг радиуса единица, то для любой гармонической функции имеем равенство

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dv_1}{dn}\right)^2 ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dv_1}{ds}\right)^2 ds;$$

отобразим конформно область B на круг и в приведенном равенстве, но

только для функции v выполним в интегралах замену переменных, после чего получим

$$\int_0^l \left(\frac{dv}{dn}\right)^2 ds \leqslant N \int_0^l \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 ds = M_1^2 N,$$

откуда и будет следовать оценка (5).

Оценки. Бигармоническая функция W_1 в области B может быть представлена в форме

$$W_1 = R^2 u_1 + u_2,$$

где u_1 и u_2 — гармонические функции.

Отобразим конформно область B на единичный круг A; тогда W_1 перейдет в функцию $\overline{W}_1 = \overline{R}^2\,\overline{u}_1 + \overline{u}_2$ с краевыми условиями

$$\overline{W}_1\Big|_{\Gamma_A} = 0, \qquad \frac{d\overline{W}_1}{d\rho}\Big|_{\Gamma_A} = \overline{\theta}(\varphi)\,\frac{1}{|f'(z)|_{\Gamma_A}} = \theta_1(\varphi).$$

Из краевых условий следует

$$\overline{u}_2\big|_{\Gamma_A} = -\,\overline{R^2 u_1}\big|_{\Gamma_A},$$

что дает возможность в круге A функцию $\overline{W}_1$ представить интегралами Пуассона через граничные значения функции u_1:

$$\overline{W}_1(\rho, \varphi) = \overline{R}^2(\rho, \varphi)\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{u}_1(1, \varphi_0)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi_0 -$$

$$-\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{R}^2(1, \varphi_0)\,\overline{u}_1(1, \varphi_0)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi_0. \qquad (6)$$

Из (6) непосредственно получаем

$$\theta_1(\varphi) = \frac{d\overline{R}^2}{d\rho}\Big|_{\Gamma_A} u_1(1, \varphi) + \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\overline{R}^2(1, \varphi) - \overline{R}^2(1, \varphi_0)] \times$$

$$\times\,\frac{d}{d\rho}\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi_0,$$

где под интегралом при каждом фиксированном ρ имеем антисимметричное ядро, поэтому, согласно (2), будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\rho}\,\overline{R}^2\Big|_{\Gamma_A} u_1^2(1, \varphi_0)\,d\varphi_0 = \int_0^{2\pi} \theta_1(\varphi_0)\,u_1(1, \varphi_0)\,d\varphi_0,$$

откуда после замены переменной интегрирования получаем

$$\int_0^l \frac{d}{dn}\,R^2\Big|_{\Gamma_B} u_1^2(s)\,ds = \int_0^l \theta(s)\,u_1(s)\,ds$$

или

$$\int_0^l u_1^2(s)\,ds \leqslant \frac{1}{\min\left(\frac{dR^2}{dn}\right)^2}\int_0^l \theta^2(s)\,ds. \qquad (7)$$

Для гармонической функции $u_2\big|_{\Gamma_B}$ будем иметь оценку

$$\int_0^l u_2^2(s)\,ds \leqslant \frac{\max R^4}{\min (dR^2/dn)^2}\int_0^l \theta_2(s)\,ds = K_2^2.$$

Теперь бигармоническую функцию W представим при помощи потенциала двойного слоя

$$W = R^2 \int_0^l \mu_1(s_0) \frac{d}{dn_p} \ln \frac{1}{r_{p,Q}} ds_0 + \int_0^l \mu_2(s_0) \frac{d}{dn_p} \ln \frac{1}{r_{p,Q}} ds_0,$$

где из (4), (7), (8) имеем

$$\left[\int_0^l \mu_1^2(s)\, ds\right]^{1/2} \leqslant \frac{k_1}{\pi(1-k)}, \qquad \left[\int_0^l \mu_2^2(s)\, ds\right]^{1/2} \leqslant \frac{M+k_2}{\pi(1-k)}.$$

Если теперь примем во внимание, что

$$\frac{d}{dn_p} \ln \frac{1}{r_{p,Q}} \leqslant \frac{1}{r_{p,Q}}; \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d}{dn_p} \ln \frac{1}{r_{p,Q}}\right]\right| \leqslant \frac{3}{r_{p,Q}^2};$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{d}{dn_p} \ln \frac{1}{r_{p,Q}}\right]\right| < \frac{9}{r_{p,Q}^3}; \qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left[\frac{d}{dn_p} \ln \frac{1}{r_{p,Q}}\right]\right| \leqslant \frac{13}{r_{p,Q}^3}$$

и воспользуемся неравенством Буняковского, то для точек, удаленных на некоторое расстояние от границы, для бигармонической функции и для вторых производных бигармонической функции (напряжений) получим практически пригодные оценки:

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right| \leqslant \frac{k_1}{\pi(1-k)} \left\{2\left[\int_0^l \frac{ds}{r_{p,Q}^2}\right]^{1/2} + 12 \max R \left[\int_0^l \frac{ds}{r_{p,Q}^4}\right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + 9 \max R^2 \left[\int_0^l \frac{ds}{r_{p,Q}^6}\right]^{1/2}\right\} + 9 \frac{M+k_2}{\pi(1-k)} \left[\int_0^l \frac{ds}{r_{p,Q}^6}\right]^{1/2};$$

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}\right| < \frac{k_1}{\pi(1-k)} \left\{4\left[\int_0^l \frac{ds}{r_{p,Q}^4}\right]^{1/2} + 13 \max R \left[\int_0^l \frac{ds}{r_{p,Q}^6}\right]^{1/2}\right\} +$$

$$+ 13 \frac{M+k_2}{\pi(1-k)} \left[\int_0^l \frac{ds}{r_{p,Q}^6}\right]^{1/2}.$$

Молотовский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
1 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, В. Н. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М., 1949, стр. 139—143.