Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ЗОЛОТАРЕВ

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 VI 1955)

А. Н. Тихонов в работе (1) установил, что решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (u(x, 0) = \varphi(x)) \tag{1}$$

не вполне определяется заданием начального условия $u(x, 0) = \varphi(x)$, а именно, им было показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие решения уравнения (1), которые не равны тождественно нулю, но для которых $u(x, 0) = 0$ и

$$f(x)\, e^{-x^{2+\varepsilon}} \to 0 \quad \text{при } |x| \to \infty,$$

где

$$f(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} |u(x, t)|.$$

В настоящей заметке ставится целью установление необходимых и достаточных условий единственности решения задачи Коши для уравнения (1) среди так называемых решений типа функции (2).

Для дальнейшего нам понадобится следующее, элементарно устанавливаемое, утверждение относительно оценок коэффициентов разложения в ряд Тейлора некоторого класса целых функций.

Лемма 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *— целая аналитическая функция, для которой*

$$M(r) = \max_{|z| = r} |f(z)|,$$

начиная с некоторого $r > R$, *удовлетворяет неравенству*

$$M(r) \leqslant Ce^{\Phi(r)} \quad (C = \text{const}), \tag{а}$$

где положено

$$\Phi(r) = \int_0^r \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Здесь $\varphi(\tau)$ *— непрерывно дифференцируемая функция, принимающая в нуле значение нуль и монотонно возрастающая (в строгом смысле) на промежутке* $0 \leqslant \tau < \infty$.

Тогда для достаточно больших $n \geqslant N(R)$ *имеет место неравенство*

$$|a_n| \leqslant \frac{e^{\Phi[b(n)]}}{[b(n)]^n}, \tag{б}$$

где $b(r)$ *— функция, обратная к* $r\Phi'(r) = r\varphi(r)$.

Обратно, если для коэффициентов a_n разложения в ряд Тейлора функции $f(z)$ имеют место неравенства (б), *то $f(z)$ — целая аналитическая функция, для которой $M(r)$ удовлетворяет неравенству* (а).

Следуя И. М. Гельфанду и Г. Е. Шилову (2), мы истолковываем уравнение (1) как уравнение относительно обобщенной функции, зависящей от параметра t и по x принадлежащей к некоторому фиксированному пространству $T(K_F)$, введенному Б. Л. Гуревичем (3). Применяя к задаче Коши (1) преобразование Фурье, мы придем к эквивалентной ей, с точки зрения единственности решения, задаче Коши в пространстве $T(z^\Phi)$ * для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dV(s,\,t)}{dt} = -4\pi^2 s^2 V(s,\,t) \tag{2}$$

с начальным условием

$$V(s,\,0) = \widetilde{u_0(x)} = V_0(s). \tag{3}$$

Относительно последней мы и будем вести наше дальнейшее рассуждение.

Теорема. *Задача Коши* (2) — (3) *в пространстве $T(z^\Phi)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда расходится интеграл*

$$\int_1^\infty \frac{\Phi(\sqrt{r})}{r^2}\,dr. \tag{4}$$

Необходимость. Для доказательства необходимости мы предположим интеграл (4) сходящимся и покажем, что в этом случае задача Коши (2)—(3) при $V_0(s) \equiv 0$ имеет отличное от нуля решение. Рассмотрим для этого класс $C_{\langle m_n\rangle}$ (4) функции $f(t)$, для которого

$$m_n = \frac{[b(2n)]^{2n}}{e^{\Phi[b(2n)]}}$$

(здесь функция $b(r)$ та же, что и в лемме 1).

Оценим для класса $C_{\langle m_n\rangle}$ функцию Карлемана (4)

$$T(r) = \max_{n\geqslant 1} r^n \frac{e^{\Phi[b(2n)]}}{[b(2n)]^{2n}}.$$

Этот максимум при свободном изменении n достигается для n, определяемых равенством $b(2n) = \sqrt{r}$, и равен $e^{\Phi(\sqrt{r})}$.

Тогда, в силу предположения о сходимости интеграла (4), по теореме Карлемана (4) существует бесконечно дифференцируемая функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям:

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \frac{[b(2n)]^{2n}}{e^{\Phi[b(2n)]}} K^n \quad (K = \text{const};\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ K < 2\pi);$$

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad f(t) \not\equiv 0.$$

Образуем теперь функционал

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \frac{\delta^{(2n)}(s)}{(2n)!} f^{(n)}(t).$$

В силу условия, наложенного на K, и леммы 1 F принадлежит пространству $T(z^\Phi)$. Кроме того, F (2) удовлетворяет уравнению (2) и начальному условию $F(s,\,0) = 0$. Необходимость теоремы доказана.

---

* Φ — функция, двойственная, по Юнгу (3), к функции F.

Достаточность. Пусть интеграл $\int_1^\infty \frac{\Phi(\sqrt{r})}{r^2}\,dr$ расходится. Всякое решение уравнения $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$, определенное для всех x в полуплоскости $t > 0$, является целой функцией от x (при любом $t > 0$) и имеет следующее разложение по степеням x [1]:

$$u(x, t) = f(t) + xf_1(t) + \frac{x^2}{2!}f'(t) + \frac{x^3}{3!}f_1'(t) + \ldots$$

Соответствующее решение задачи Коши для уравнения (2) в пространстве $T(z^\Phi)$ при нулевом начальном условии запишется в виде

$$F = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\pi i)^{2n}}\frac{\delta^{(2n)}(s)}{(2n)!}f^{(n)}(t) + \frac{1}{(2\pi i)^{2n+1}}\frac{\delta^{(2n+1)}(s)}{(2n+1)!}f_1^{(n)}(t)\right].$$

Функционал F действует на любую функцию $\psi(s) \in z^\Phi$ по формуле

$$(F, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\pi i)^{2n}}\frac{\psi^{(2n)}(0)}{(2n)!}f^{(n)}(t) - \frac{1}{(2\pi i)^{2n+1}}\frac{\psi^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}f_1^{(n)}(t)\right],$$

причем полученный числовой ряд сходится заведомо для всякой основной функции $\psi(s)$ из z^Φ. Поэтому $f^{(n)}(t)$ и $f_1^{(n)}(t)$ удовлетворяют, соответственно, неравенствам:

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant A^{2n}\left|\frac{(2n)!}{\psi^{(2n)}(0)}\right| \leqslant A^{2n}\frac{[b(2n)]^{2n}}{e^{\Phi[b(2n)]}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

$$|f_1^{(n)}(t)| \leqslant B^{2n+1}\left|\frac{(2n+1)!}{\psi^{(2n+1)}(0)}\right| \leqslant B^{2n+1}\frac{[b(2n+1)]^{2n+1}}{e^{\Phi[b(2n+1)]}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

В силу нулевого начального условия

$$f^{(n)}(0) = f_1^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Так как классы $C_{\langle m_n\rangle}$ $(m_n = [b(2n)]^{2n}/e^{\Phi[b(2n)]})$ и $C_{\langle m_n'\rangle}$ $(m_n' = [b(2n+1)]^{2n+1}/e^{\Phi[b(2n+1)]})$ имеют в качестве функций Карлемана, соответственно, $T(r) = O(e^{\Phi(\sqrt{r})})$ и $T'(r) = O(e^{\Phi(\sqrt{r})}/\sqrt{r})$, то, в силу предположения о расходимости интеграла $\int_1^\infty \frac{\Phi(\sqrt{r})}{r^2}\,dr$, они будут квазианалитическими. Отсюда (см. (5)—(7)) заключаем, что $f(t) = f_1(t) \equiv 0$, т. е. и $F = 0$. Этим и завершается доказательство достаточности теоремы.

Доказанная теорема показывает, что область единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в действительности шире, чем та, которая была указана А. Н. Тихоновым [1].

Так например, при $\Phi = \frac{x^2}{1 + \ln x}$ решение задачи Коши (2)—(3) единственно в пространстве $T(z^\Phi)$, а, стало быть, решение задачи Коши (1) остается единственным в пространстве $T(K_F)$, где F растет заведомо быстрее, чем x^2.

Замечание. Аналогичный результат имеет место и для уравнения $\partial u/\partial t = (-1)^{p-1}\partial^{2p}u/\partial x^{2p}$. В этом случае интеграл (4) заменяется интегралом $\int_1^\infty \frac{\Phi(\sqrt[2p]{r})}{r^2}\,dr$.

Поступило
22 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 42, № 2 (1935). [2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 8, в. 6 (58) (1953). [3] Б. Л. Гуревич, ДАН, 99, № 6 (1954). [4] Г. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, 1937.