Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН и А. П. ТАМАДЯН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 9 VI 1955)

Пусть $f(z)$ голоморфна и ограничена в бесконечной области D, не разбивающей плоскость, и непрерывна в каждой конечной части $\overline{D}$. Обозначим

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; D) = \inf_{\{g_\sigma\}} \{\sup_{\overline{D}} |f(z) - g_\sigma(z)|\},$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций $g_\sigma(z)$ данного порядка $\rho > 0$ и типа $\leqslant \sigma$, ограниченных в $\overline{D}$.

Если предполагать, что для данного $\rho > 0$ $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} A_\sigma^{(\rho)}(f, D) = 0$, то естественно поставить вопрос о выяснении связи между порядком убывания чисел $A_\sigma^{(\rho)}(f, D)$, когда $\sigma \to +\infty$, и дифференциальными свойствами приближаемой функции $f(z)$ на границе области D. В работах С. Н. Бернштейна [1] поставленный выше вопрос был полностью выяснен в случае, когда замкнутая область $\overline{D}$ вырождается во всю ось $(-\infty, +\infty)$. В настоящей заметке приводятся формулировки ряда результатов о наилучшем приближении целыми функциями в угловых областях. Отметим, что вопросы полноты целых функций в области угла впервые были исследованы в работах Кобера [2] и М. В. Келдыша [3].

1°. Обозначим, соответственно, через $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ области противолежащих углов $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и $|\arg z + \pi| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ $(\rho > 1)$. Заметим, что при $\rho = 1$ множество $\overline{D}^{(1)}$ (где $\overline{D}^{(\rho)} = \overline{D}_1^{(\rho)} + \overline{D}_2^{(\rho)}$) представляет собой всю вещественную ось $(-\infty, +\infty)$. Пусть при $\rho > 1$ $f_i(z)$ $(i = 1, 2)$ — ограниченные голоморфные функции внутри области $D_i^{(\rho)}$ $(i = 1, 2)$ и непрерывны на ее границе. При $\rho = 1$ положим, что функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ ограничены и непрерывны на полуосях $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$, соответственно. Полагая, что $f_1(0) = f_2(0)$, определим функцию

$$f(z) = f_1(z) \text{ при } z \in \overline{D}_1^{(\rho)}; \qquad f(z) = f_2(z) \text{ при } z \in \overline{D}_2^{(\rho)},$$

которая непрерывна и ограничена на множестве $\overline{D}^{(\rho)}$ и аналитична на его компонентах $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ непрерывна и ограничена на $\overline{D}^{(\rho)}$ $(\rho \geqslant 1)$ вместе со своими производными до порядка $p-1$ $(p \geqslant 1)$ включительно, причем*

$$\sup_{z \in \overline{D}_1^{(\rho)}, \overline{D}_2^{(\rho)}} |f^{(p)}(z)| \leqslant M_p < +\infty,$$

тогда

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; D^{(\rho)}) \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{p/\rho}},$$

где постоянная C_p не зависит от $\sigma > 0$ и от функции $f(z)$.

Теорема 2. *Если функция $f(z)$ непрерывна и ограничена на $\overline{D}^{(\rho)}$ вместе со своими производными до порядка p $(p \geqslant 1)$ включительно, причем*

$$\omega(h; f^{(p)}) = \sup_{|z'-z''| \leqslant h} |f^{(p)}(z') - f^{(p)}(z'')|$$

модуль непрерывности функции $f^{(p)}(z)$ на $\overline{D}^{(\rho)}$, то при $\sigma \geqslant 1$

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; D^{(\rho)}) \leqslant C_p^* \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{1/\rho}}; f^{(p)}\right)}{\sigma^{p/\rho}},$$

где постоянная C_p^* не зависит от σ и от функции $f(z)$.

Обращением этих теорем является следующая:

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — ограниченная функция комплексного переменного z, определенная на замкнутом множестве $\overline{D}(\rho)$ $(\rho \geqslant 1)$. Пусть для любого $\sigma > 0$*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; D^{(\rho)}) \leqslant \frac{C}{\sigma^r} \quad (r > 0),$$

где $C > 0$ постоянная, не зависящая от σ.

Тогда справедливы следующие утверждения:

Если $\rho \geqslant 1$ и $r = p + \alpha$, где $p \geqslant 0$ целое число и $0 < \alpha \leqslant 1$, то функция $f(z)$ при $\rho > 1$ голоморфна на компонентах $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ множества $D^{(\rho)}$ и при $\rho \geqslant 1$ непрерывна вместе со своими производными до порядка p включительно на всякой конечной части замкнутого множества $\overline{D}^{(\rho)}$. Кроме того, как функция от длины дуги на всякой конечной части границы $\overline{D}^{(\rho)}$ при $0 < \alpha < 1$ $f^{(p)}(z) \in \operatorname{Lip}\alpha$, а при $\alpha = 1$ $\omega(h; f^{(p)}) \leqslant Mh \log \frac{1}{h}$ $(0 < h < 1)$.

Если $\rho > 1$ и $r = p_1/\rho + \alpha_1$, где $p_1 \geqslant 0$ целое число (очевидно, $p \geqslant p$), а $0 < \alpha_1 \leqslant 1$, то функция $f(z)$ в точке $z = 0$ будет иметь внутренние угловые производные до порядка p_1 включительно, причем при $|z| \to 0$, когда $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\delta$, $|\arg z + \pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) - \delta$ $(\delta > 0)$

$$|f^{(p_1)}(z) - f^{(p_1)}(0)| < \begin{cases} C_1(\delta)|z|^{\alpha_1} \log \frac{1}{|z|} & \text{при } 0 < \alpha_1 < 1; \\ C_2(\delta)|z| & \text{при } \alpha_1 = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Сравнивая прямую теорему 2 и обратную теорему 3, приходим к выводу, что прямую теорему 2 существенно усилить нельзя.

Следующая теорема показывает, что при более быстром убывании наилучших приближений, чем это требуется в теореме 3, обеспечивается аналитичность функции $f(z)$ не только на $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ в отдельности, но и в более широкой односвязной области, содержащей $\overline{D}^{(\rho)}$.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — ограниченная функция, определенная на $\overline{D}^{(\rho)}$. Если*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f(z); D^{(\rho)}) \leqslant Ce^{-\gamma\sigma},$$

где $\gamma > 0$ и $C > 0$ постоянные, не зависящие от σ, то функция $f(z)$ будет аналитической и ограниченной внутри области, содержащей всю ось $(-\infty, +\infty)$ и ограниченной кривыми $r^\rho \cos\rho(\theta + \pi/2) = \gamma$, $|\theta + \pi/2| < \pi/2\rho$ и $r^\rho \cos\rho(\theta - \pi/2) = \gamma$, $|\theta - \pi/2| < \pi/2\rho$.

2°. Обозначим через $G^{(\rho)}$ $(\rho > 1/2)$ область угла $|\arg z - \pi/2| < \pi(1 - 1/2\rho)$. Заметим, что при $\rho = 1/2$ замкнутое множество $\overline{G}^{(1/2)}$ представляет собой полуось $[0, i\infty)$ мнимой оси.

Теорема 5. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G^{(\rho)}$ (при $\rho > 1/2$) и непрерывна в $\overline{G}^{(\rho)}$ (при $\rho \geqslant 1/2$).*

Тогда:

1. *Если при* $1/2 \leqslant \rho < 1$ *функция* $f(z^2)$ *непрерывна на лучах* $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$ *вместе со своими производными до порядка* $p-1$ $(p \geqslant 1)$ *включительно, причем на указанных лучах*

$$\sup \left| \frac{d^p}{dz^p} f(z^2) \right| \leqslant M_p < +\infty,$$

то

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(\rho)}) \leqslant C_p \frac{M_p}{\sigma^{p/2\rho}},$$

где C_p *не зависит от* σ *и функции* $f(z)$.

2. *Если при* $\rho \geqslant 1$ *функция* $f(z)$ *непрерывна на* $\overline{G}^{(\rho)}$ *вместе со своими производными до порядка* $p-1$ $(p \geqslant 1)$ *включительно, причем*

$$\sup_{\overline{G}^{(\rho)}} |f^{(p)}(z)| \leqslant M_p^* < +\infty,$$

то

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(\rho)}) \leqslant C_p^* \frac{M_p^*}{\sigma^{p/\rho}},$$

где C_p^* *не зависит от* σ *и функции* $f(z)$.

Пусть при $1/2 \leqslant \rho < 1$ $G_1^{(2\rho)}$ означает область угла $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$.

Теорема 6. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области* $G^{(\rho)}$ *(при* $\rho > 1/2$*) и непрерывна на* $\overline{G}^{(\rho)}$ *(при* $\rho \geqslant 1/2$*).*

Тогда:

1. *Если при* $1/2 \leqslant \rho < 1$ *функция* $f(z^2)$ *непрерывна на* $\overline{G}_1^{(2\rho)}$ *вместе со своими производными (по* z*) до порядка* p $(p \geqslant 0)$ *включительно, причем*

$$\omega_1^*(h; f^{(p)}(z^2)) = \sup_{|z_1 - z_2| \leqslant h} |f^{(p)}(z_1^2) - f^{(p)}(z_2^2)|$$

модуль непрерывности функции $f^{(p)}(z^2)$ *на* $\overline{G}_1^{(\rho)}$, *то*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(\rho)}) \leqslant C_p \frac{\omega_1^*\left(\frac{1}{\sigma^{1/2\rho}}; f^{(p)}(z^2)\right)}{\sigma^{1/2\rho}},$$

где постоянная C_p *не зависит от* $\sigma > 0$ *и функции* $f(z)$.

2. *Если при* $\rho \geqslant 1$ *функция* $f(z)$ *непрерывна на* $\overline{G}^{(\rho)}$ *вместе со своими производными до порядка* p $(p \geqslant 0)$ *включительно, причем*

$$\omega(h; f^{(p)}(z)) = \sup_{|z_1 - z_2| \leqslant h} |f^{(p)}(z_1) - f^{(p)}(z_2)|$$

модуль непрерывности функции $f^{(p)}(z)$ *на* $\overline{G}^{(\rho)}$, *то*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; G^{(p)}) \leqslant C_p^* \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{1/\rho}}; f^{(p)}(z)\right)}{\sigma^{p/\rho}}$$

и постоянная C_p^* *не зависит от* $\sigma > 0$ *и функции* $f(z)$.

Обозначим через Ω_ρ $(\rho > 1/2)$ область угла $|\arg z| > \pi/2\rho$, имеющего раствор $\pi(2 - 1/\rho)$. При $\rho = 1/2$ множество $\Omega^{(1/2)}$ совпадает с полуосью $(-\infty, 0]$. Имеет место следующая обратная теорема о наилучшем приближении в угле Ω_ρ.

Теорема 7. *Пусть* $f(z)$ *— ограниченная на* $\overline{\Omega}_\rho$ *функция, для которой*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; \Omega_\rho) \leqslant \frac{C}{\sigma^r} \quad (r > 0),$$

где $C>0$ — постоянная, не зависящая от σ. Тогда $f(z)$ голоморфна в Ω_ρ (при $\rho>1/2$) и непрерывна в $\overline{\Omega}_\rho$ (при $\rho\geqslant 1/2$). Кроме того:

1. *Если $1/2\leqslant\rho\leqslant 1$ и $r=p+\alpha$, $r=p_1/\rho+\alpha_1$, где $p\geqslant 0$ и $p_1\geqslant 0$ — целые числа (очевидно, $p_1\leqslant p$), а $0<\alpha\leqslant 1$ и $0<\alpha_1\leqslant 1$, то:*

а) *функция $f(z)$ на всякой конечной части границы области Ω_ρ имеет непрерывные производные до порядка p_1 включительно, при этом на части границы Ω_ρ, лежащей в круге $|z|\leqslant R$, $f^{(p_1)}(z)$ будет иметь модуль непрерывности*

$$\omega(h; f^{(p_1)}(z))\leqslant\begin{cases}C_1(R)\,h^{\alpha_1} & \text{при}\quad 0<\alpha_1<1;\\ C_2(R)\,h\log\dfrac{1}{h} & \text{при}\quad \alpha_1=1,\end{cases}$$

где $C_k(R)$ $(k=1,2)$ — постоянные, зависящие от R;

б) *на всякой конечной части границы области Ω_ρ, лежащей вне круга $|z|\leqslant\delta$ $(\delta\geqslant 0)$, функция $f(z)$ имеет непрерывные производные до порядка p $(p\geqslant p_1)$ включительно, при этом на части границы Ω_ρ, лежащей в кольце $\delta\leqslant|z|\leqslant R$, $f^{(p)}(z)$ будет иметь модуль непрерывности*

$$\omega(h; f^{(p)}(z))\leqslant\begin{cases}C_3(\delta; R)\,h^{\alpha} & \text{при}\quad 0<\alpha<1;\\ C_4(\delta; R)\,h\log\dfrac{1}{h} & \text{при}\quad \alpha=1,\end{cases}$$

где $C_k(\delta, R)$ $(k=3,4)$ — постоянные, зависящие от δ и R.

2. *Если $\rho\geqslant 1$ и $r=p+\alpha$, где $p\geqslant 0$ — целое число, и $0<\alpha\leqslant 1$, то функция $f(z)$ на всякой конечной части границы Ω_ρ имеет непрерывные производные до порядка p включительно, при этом на части границы Ω_ρ, лежащей в круге $|z|\leqslant R$, $f^{(p)}(z)$ имеет модуль непрерывности*

$$\omega(h; f^{(p)}(z))\leqslant\begin{cases}C_1(R)\,h^{\alpha} & \text{при}\quad 0<\alpha<1;\\ C_2(R)\,h\log\dfrac{1}{h} & \text{при}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Если же $r=p_1/\rho+\alpha_1$, где $p_1\geqslant 0$ — целое число $(p_1\geqslant p)$, а $0<\alpha_1\leqslant 1$, то в точке $z=0$ функция $f(z)$ будет иметь внутренние угловые производные до порядка p_1 включительно, при этом для разности $f^{(p_1)}(z)-f^{(p_1)}(0)|$ справедливы оценки вида (*).

Теорема 8. *Пусть $f(z)$ — ограниченная на $\overline{\Omega}_\rho$ $(\rho\geqslant 1/2)$ функция, для которой*

$$A_\sigma^{(\rho)}(f; \Omega_\rho)\leqslant Ce^{-\gamma\sigma}\quad(\sigma>0),$$

где $\gamma>0$ и $C>0$ постоянные, не зависящие от σ. Тогда функция $f(z)$ будет аналитической и ограниченной внутри области, содержащей полуось $[0, +\infty)$ и ограниченной кривой $r^\rho\cos\rho\theta=\gamma$.

Отметим, что доказательство обратных теорем, приведенных выше, непосредственно следует из результатов работы (4). Отметим также, что из результатов теорем 1, 2, 3 в частном случае, когда $\rho=1$, следуют известные результаты С. Н. Бернштейна (1) о наилучшем приближении по всей оси $(-\infty, +\infty)$ целыми функциями экспоненциального вида.

Сектор математики и механики
Академии наук АрмССР

Поступило
30 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 2, статьи 84 и 86, 1954. [2] H. Kober, Trans. Am. Math. Soc., 56, 7 (1944). [3] М. В. Келдыш, ДАН, 47, № 4 (1945). [4] М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук, 8, № 2 (1955).