Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

МАТЕМАТИКА

С. И. АЛЬБЕР

ГОМОЛОГИИ СПИНОРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 VII 1955)

Гомологии компактных групп Ли были впервые исследованы Л. С. Понтрягиным в 1935—1939 гг. ([1-4]). Исследования Л. С. Понтрягина были продолжены в многочисленных работах. В последнее время было закончено описание целочисленных гомологий ортогональных групп ([5,6]).

Но гомологии универсальной накрывающей группы ортогональной группы (спинорной группы Spin (n)) полностью до сих пор не найдены. Борель описал ([7]) ее алгебру гомологий по модулю два и доказал, что эта группа имеет кручение только второго порядка, причем лишь при $n \geqslant 7$. Свои результаты Борель получил алгебраическими методами, используя технику косых произведений.

В настоящей работе полностью исследуются гомологии спинорной группы, причем база гомологий строится эффективно. Все результаты получаются прямым геометрическим методом, основанным на теории двойственности Л. С. Понтрягина ([1-4, 8, 9]).

1. Основные циклы в спинорной группе. Пусть $R(n)$ — группа вращений n-мерного евклидова пространства E^n. Спинорной группой Spin (n) называют двухслойную универсальную накрывающую группу группы $R(n)$.

Гомоморфизм накрытия Spin (n) на $R(n)$ обозначим через ω. Пусть $M(\mathbf{x})$ — отражение пространства E^n относительно гиперплоскости, ортогональной к единичному вектору $\mathbf{x}$. Тогда произведение преобразований $M(\mathbf{x})\,M(\mathbf{x}_0)$, где $\mathbf{x}_0$ — фиксированный вектор $(1, 0, \ldots, 0)$, является собственным ортогональным преобразованием пространства E^n.

Пусть $\tilde{M}(\mathbf{x}) = \omega^{-1}[M(\mathbf{x})\,M(\mathbf{x}_0)]$ — матрица двухзначного спинорного представления группы $R(n)$, соответствующая вектору $\mathbf{x}$ ([10]). Тогда

$$\tilde{M}(-\mathbf{x}) = -\tilde{M}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Если S^m — сфера всех единичных векторов $(m+1)$-мерного пространства E^{m+1}, то отображение

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\alpha} \tilde{M}(\mathbf{x})$$

определяет гомеоморфизм

$$S^m \xrightarrow{\alpha^*} \text{Spin}\,(n).$$

Обозначим

$$[m] = \alpha^*(S^m).$$

Тогда функция $\alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \alpha(\mathbf{x}_k)\cdot\alpha(\mathbf{x}_{k-1})\ldots\alpha(\mathbf{x}_1)$ (произведение в смысле группового произведения в Spin (n)) отображает прямое произве-

дение $S^{a_k} \times \cdots \times S^{a_1}$ в Spin (n). Так определяется умножение Л. С. Понтрягина:

$$[a_1, \ldots, a_k] = [a_k] \vee \ldots \vee [a_1] = \alpha^*(S^{a_k}) \cdot \alpha^*(S^{a_k - 1}) \ldots \alpha^*(S^{a_1}).$$

$[a_1, \ldots, a_k]$ служит основным циклом в Spin (n). Необходимо отметить, что цикл $[a_1, \ldots, a_k] = 0$, если $a_i = a_j$ при $i \neq j$.

Очевидно, топологическая степень отображения $\alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ больше единицы. Чтобы этого избежать, нужно в многообразии $L = S^{a_k} \times \cdots \times S^{a_1}$ предварительно провести отождествление.

Из (1) следует, что

$$\alpha(\varepsilon_1 \mathbf{x}_1, \ldots, \varepsilon_k \mathbf{x}_k) = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k), \text{ где } \varepsilon_i = \pm 1.$$

Поэтому в L нужно сделать следующее отождествление:

$$(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) \equiv (\varepsilon_1 \mathbf{x}_1, \ldots, \varepsilon_k \mathbf{x}_k), \quad \text{если } \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = 1. \tag{2}$$

Полученное после отождествления многообразие обозначим через L^*. Легко видеть, что топологическая степень отображения $\alpha^* \mu$ многообразия L^*, где μ—отображение накрытия $L \xrightarrow{\mu} L^*$, равна единице. Заметим, что псевдомногообразие $[a_1, \ldots, a_k]$ служит двухслойным накрывающим для соответствующего псевдомногообразия $[a_1, \ldots, a_k]_{R(n)}$ группы вращений $R(n)$ ([5]). Псевдомногообразия $[a_1, \ldots, a_k]$ являются циклами по mod 2.

2. Специальные цепи в спинорной группе. В этом пункте каждый цикл $[a_1, \ldots, a_k]$ делится на две цепи, после чего исследуется их граница.

Пусть

$$(m^+) = \alpha^*(S_+^m), \quad \text{где} \quad S_+^m = \{S^m;\ x_1 > 0\},$$
$$(m^-) = \alpha^*(S_-^m), \quad \text{где} \quad S_-^m = \{S^m;\ x_1 < 0\}.$$

Тогда отображения

$$\alpha^*(S_+^{a_k}) \ldots \alpha^*(S_+^{a_i}) \ldots \alpha^*(S_+^{a_1}) = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k),$$
$$\alpha^*(S_+^{a_k}) \ldots \alpha^*(S_-^{a_i}) \ldots \alpha^*(S_+^{a_1}) = (a_1, \ldots, a_i^-, \ldots, a_k)$$

являются однозначными отображениями $S_+^{a_k} \times \cdots \times S_+^{a_i} \times \cdots \times S_+^{a_1}$ и $S_+^{a_k} \times \cdots \times S_-^{a_i} \times \cdots \times S_+^{a_1}$ в Spin (n). Клетки $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$ и $(a_1, \ldots, a_i^-, \ldots, a_k)$, рассматриваемые вместе с границей, являются цепями по mod 2 на многообразии Spin (n). Граница цепи $(a_1, \ldots, a_k)$ по mod 2 определяется по формуле

$$\Delta_2(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{k} [a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]. \tag{3}$$

Отметим, что индекс пересечения по mod 2 цепей $[a_1, \ldots, a_k]$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ равен 1, если $k + l = n - 1$ и $\alpha_i \neq a_j$ при всех i, j. В противном случае индекс пересечения цепей равен нулю.

В следующем пункте из цепей $(a_1, \ldots, a_k)$ будут построены циклы по mod 2.

3. Для удобства дальнейшей записи перейдем от символов $(a_1, \ldots, a_k)$ к дополнительным символам. Дополнительный к $(a_1, \ldots, a_k)$ символ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \approx (a_1, \ldots, a_k)$$

содержит все числа из дополнения к множеству $a_1, \ldots, a_k$ в множестве $1, \ldots, n-1$. Символ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ будем считать равным нулю, если в нем либо $\alpha_i \geqslant n$, либо $\alpha_i = \alpha_j$ при $i \neq j$.

Положим

$$[a_1, \ldots, a_k] \cong |\alpha_1, \ldots, \alpha_l|.$$

Тогда

$$\Delta(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{k} [a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k] \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{l} |\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_l| = \nabla\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}. \quad (4)$$

Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} = \{\alpha_{s(1)}, \ldots, \alpha_{s(l)}\}$ при любой перестановке индексов $1, \ldots, l$. Введем операцию умножения символов. Положим

$$\{\alpha\} * \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} = \{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\} + \sum_{i=1}^{l} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \alpha, \ldots, \alpha_l\}. \quad (5)$$

Рассмотренная операция коммутативна. Заметим, что ∇-операция эквивалентна умножению на $\{1\}$ с последующим изменением вида скобок.

Пользуясь этими свойствами умножения символов, легко показать, что на многообразии Spin (2^s) цепи

$$(a_1, \ldots, a_k) + \cdots \approx \{2^0\} * \{2^1\} * \cdots * \{2^{s-1}\} * \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, \quad (6)$$

где $$\alpha_i \neq 2^v \quad (0 \leqslant v \leqslant s-1)$$

являются циклами по mod 2. Индекс пересечения этого цикла с циклом $[1, 2, \ldots, 2^2, \ldots, 2^{s-1}, \ldots]$, в котором между числами 2^v и 2^{v+1} стоят числа α_i, равен единице. Чтобы получить специальные циклы многообразия Spin (n) $(n \leqslant 2^s - 1)$, нужно построенные циклы пересечь с подмногообразием Spin $(n) \subset$ Spin (2^s).

4. Пусть P — подмногообразие матриц группы $R(n)$, у которых $a_{nn} = -1$, а $R(n-1)$ — подгруппа матриц, у которых $a_{nn} = 1$ ([3]). При исследовании гомологий ортогональной группы Л. С. Понтрягин определил на $R(n)$ вещественную числовую функцию:

$$f(\|a_{ij}\|) = a_{nn}$$

и показал, что $df = 0$ только на P и $R(n-1)$. Определим на Spin (n) функцию $\varphi(\tilde{M}) = f(\omega\tilde{M})$. Легко видеть, что $d\varphi = 0$ только на подмногообразиях $K = \omega^{-1}(P)$ и Spin $(n-1) = \omega^{-1}[R(n-1)]$. Поэтому на Spin (n) можно определить деформацию D_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ по ортогональным траекториям функции φ, для которой

$$D_0(\text{Spin}(n)/K) = \text{Spin}(n)/K, \quad D_1(\text{Spin}(n)/K) = \text{Spin}(n-1).$$

5. Гомологии спинорной группы по mod 2.

Теорема 1. *Пусть* $n = 2^{s-1} + \omega$ $(0 < \omega \leqslant 2^{s-1})$. *Циклы*

$$[a_1, \ldots, a_k] \quad (0 < a_1 < \ldots < a_k < n), \quad (7)$$

у которых среди чисел $a_1, \ldots, a_k$ *есть числа* $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{s-1}$, *и двойственные им специальные циклы образуют полную независимую систему образующих циклов групп* $\Delta_2^r[\text{Spin}(n)]$.

Теорема 2. *Гомоморфизм вложения* $\Delta_2^r[\text{Spin}(n-1)]$ *в* $\Delta_2^r[\text{Spin}(n)]$ *при* $2^{s-1} + 1 < n \leqslant 2^s$ *есть изоморфизм.*

Пусть $\Delta_2^r[\text{Spin}(2^s)] = A + B$, *где* B *имеет своими образующими циклы* (7). *Тогда при гомоморфизме вложения* α $\Delta_2^r[\text{Spin}(2^s)]$ *в* $\Delta_2^r[\text{Spin}(2^s+1)]$ $\alpha(A)$ *есть изоморфизм, а* $\alpha(B) = 0$.

Доказательство теорем аналогично доказательству соответствующих теорем ([8,9]). Для доказательства второй части теоремы 2 нужно предварительно показать, что

$$\text{Spin}(2^s) \sim 0 \quad \text{на} \quad \text{Spin}(2^s + 1). \quad (8)$$

Это легко следует из соотношений:

$$J[\mathrm{Spin}\,(2^s),\ (2^s)+\cdots]=1, \tag{9}$$

$$\Delta_2[(2^s)+\cdots]=[2^{s-1}-1,\ 2^{s-1}], \tag{10}$$

$$[2^{s-1}-1,\ 2^{s-1}]\sim[1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2^{s-1}]. \tag{11}$$

6. Целочисленные границы цепей. Ориентируем сферы S^m и согласуем ориентацию цепей $(a_1, \ldots, a_i^{\varepsilon}, \ldots, a_k)$ $(\varepsilon=\pm 1)$ с ориентацией топологических произведений $S_+^{a_k}\times\cdots\times S_{\varepsilon}^{a_i}\times\cdots\times S_+^{a_1}$. Тогда

$$\Delta(a_1, \ldots, a_k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{a_k+\cdots+a_i+1}[(a_1, \ldots, a_i-1, \ldots, a_k)+$$
$$+(a_1, \ldots, (a_i-1)^-, \ldots, a_k)],$$

$$\Delta[a_1, \ldots, a_k]=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{a_k+\cdots+a_i+1}\alpha_{a_i}[a_1, \ldots, a_i-1, \ldots, a_k],$$

где $\alpha_{a_i}=(-1)^{a_i}+1$ (ср. (5)).

7. Целочисленные гомологии спинорной группы.

Основная теорема. *Пусть* $n=2^s+\omega$ $(\omega<2^s)$. *Полная независимая система свободных образующих групп Бетти* $\Delta_0^r[\mathrm{Spin}\,(n)]$ *состоит из циклов:*

1) *при* n *нечетном*

$[2a_1-1,\ 2a_1,\ \ldots,\ 2a_\alpha-1,\ 2a_\alpha,\ 2^s-1,\ 2^s,\ 2b_1-1,\ 2b_1,\ \ldots,\ 2b_\beta-1,\ 2b_\beta]$

и двойственных им специальных циклов;

2) *при* n *четном*

$[2a_1-1,\ 2a_1,\ \ldots,\ 2a_\alpha-1,\ 2a_\alpha,\ 2^s-1,\ 2^s,\ 2b_1-1,\ 2b_1,\ \ldots,\ 2b_\beta-1,\ 2b_\beta]$,

$[2a_1-1,\ 2a_1,\ \ldots,\ 2a_\alpha-1,\ 2_\alpha,\ 2^s-1,\ 2^s,\ 2b_1-1,\ 2b_1,\ \ldots,\ 2b_\beta-1,\ 2b_\beta,\ n-1]$

и двойственных им специальных циклов.

Полная независимая система образующих групп кручения $\Theta^r[\mathrm{Spin}\,(n)]$ *состоит из циклов:*

$$\Delta[2a_1-1,\ 2a_1,\ \ldots,\ 2a_\alpha-1,\ 2a_\alpha,\ 2^v-1,\ 2^v,\ 2b_1-1,\ 2b_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 2b_\beta-1,\ 2b_\beta,\ 2h,\ c_1,\ \ldots,\ c_\gamma],$$

у которых множество чисел $c_1, \ldots, c_\gamma$ *содержит числа* $2^{v+1}, \ldots, 2^s$, *и зацепляющих их специальных циклов.*

Доказательство теоремы основано на рекуррентном процессе и опирается на теорию двойственности Л. С. Понтрягина. При исследовании зацеплений циклов строятся циклы по компактной группе коэффициентов П.

Заметим в заключение, что аналогично можно полностью исследовать гомологии многообразия ориентированных плоскостей, которое служит двухслойным универсальным накрывающим для многообразия Грассмана. Гомологии этого многообразия в старших размерностях были изучены Л. С. Понтрягиным.

Томский инженерно-строительный институт

Поступило 15 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, ДАН, 1, 433 (1935). [2] Л. С. Понтрягин, C. R., 200, 1277 (1935). [3] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 6, 3, 389 (1939). [4] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 11 (53), 1, 3 (1942). [5] C. Miller, Ann. of Math., 57, 1, 90 (1953). [6] A. Borel, Ann. of Math., 57, 1, 115 (1953). [7] A. Borel, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39, 11, 1142 (1953). [8] С. И. Альбер, ДАН, 91, № 6, 1237 (1953). [9] С. И. Альбер, ДАН, 98, № 3, 325 (1954). [10] Э. Картан, Теория спиноров, М., 1947.