Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 17 II 1955)

В регулярных волноводах, в которых форма и положение поперечного сечения (параллельного плоскости xy) не зависят от координаты z, поля в общем случае представляют собой совокупность волн различного типа. Каждая волна описывается так называемой мембранной функцией $\psi_m(x, y)$ (для H-волн) и $\varphi_m(x, y)$ (для E-волн), зависимость от z дается экспоненциальным множителем. Нерегулярный волновод можно рассматривать как предельный случай ступенчатого волновода, состоящего из соединенных друг с другом коротких участков регулярных волноводов различных сечений. Такой подход позволяет ожидать, что если поле в любом сечении представить как суперпозицию волн, могущих распространяться в регулярном волноводе данного сечения, т. е. описывать это поле такими же функциями, то коэффициенты такого разложения будут связаны системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Для фактического получения этой системы удобно применить прием, аналогичный методу вариации постоянных в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы рассмотрим метод на примере простейшей задачи о таком нерегулярном волноводе, в котором при данном характере возбуждения распространяются волны только одного (магнитного) типа, а E-волны не возникают. Примером такого волновода является конусный переход в круглом волноводе для симметрической магнитной волны или плоский волновод.

1. В этом частном случае поле в волноводе выражается через функцию $\Psi(x, y, z)$ по формулам

$$E_x = -ik\,\partial\Psi/\partial y; \quad E_y = ik\,\partial\Psi/\partial x; \quad E_z = 0;$$
$$H_x = \partial^2\Psi/\partial x\,\partial z; \quad H_y = \partial^2\Psi/\partial y\,\partial z; \quad H_z = k^2\Psi + \partial^2\Psi/\partial z^2. \tag{1}$$

Временная зависимость принята в виде $e^{i\omega t}$ и $k = \omega/c$. Функция Ψ удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2\Psi + \partial^2\Psi/\partial z^2 + k^2\Psi = 0, \tag{2}$$

где ∇^2 — двумерный (в переменных x, y) оператор Лапласа. Тангенциальная к поверхности металла компонента поля $\mathbf{E}$ равна $E_s = ik\,\partial\Psi/\partial n$, где s и n — соответственно, направление касательной и нормали к контуру, получающемуся при сечении волновода плоскостью $z = \text{const}$; поэтому граничное условие для Ψ есть

$$\partial\Psi/\partial n = 0. \tag{3}$$

Задача состоит в определении Ψ по (2), (3) и по условиям в поперечном сечении волновода, которые мы уточним ниже.

2. Введем систему мембранных функций $\psi_m(x, y, z)$, каждая из которых удовлетворяет двумерному волновому уравнению

$$\nabla^2\psi_m + \alpha_m^2\psi_m = 0 \tag{4}$$

в области $S(z)$, получающейся в сечении $z = \text{const}$, и граничному условию $\partial\psi_m/\partial n = 0$ на контуре этой области. Собственным значениям $\alpha_m(z)$ уравнений (4) соответствуют волновые числа

$$h_m(z) = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2(z)}\,. \tag{5}$$

В любом сечении функции ψ_m ортогональны между собой. Мы примем для них нормировку

$$\alpha_m^2 \int_S \psi_m^2\, dS = 1. \tag{6}$$

3. Функцию $\Psi(x, y, z)$ будем искать в виде ряда по функциям $\psi_m(x, y, z)$ с коэффициентами, зависящими от z. Имея в виду в первую очередь волноводы с медленно меняющимися параметрами, запишем искомое разложение в виде

$$\Psi = \sum_m D_m\,(e^{-i\gamma_m} + B_m e^{i\gamma_m})\, h_m^{-1/2}\psi_m, \tag{7}$$

где $D_m(z)$ и $B_m(z)$ — искомые амплитуды и где, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами или в вопросах, связанных с приближением геометрической оптики, введена функция

$$\gamma_m = \int^z h_m(z)\, dz. \tag{8}$$

Функция (7) удовлетворяет, как легко проверить, граничному условию (3) и условию исчезновения нормальной к металлу компоненты магнитного поля.

4. Разложение (7) надо подставить в (2). При вычислении $\partial\Psi/\partial z$ появятся производные $\partial\psi_m/\partial z$; эти функции мы разложим в ряд по ψ_m, соответствующим тому же z:

$$\partial\psi_m/\partial z = \sum_p \beta_{mp}\psi_p. \tag{9}$$

Матрица β_{mp} определяется только геометрическими условиями. Легко показать, что $\beta_{mp} = -\beta_{pm}$ и $\beta_{mm} = 0$. Для конусного перехода, в котором каждое сечение есть круг радиуса $a(z)$ (а образующая есть любая линия):

$$\beta_{mp} = \frac{2a'}{a}\,\frac{\lambda_p\lambda_m}{\lambda_p^2 - \lambda_m^2}; \quad p \neq m; \quad a' = da/dz, \tag{10}$$

где λ_m — корни функции Бесселя первого порядка.

5. Коэффициенты D_m, B_m определяются подстановкой ряда (7) в уравнение (2). Мы дополнительно подчиним D_m, B_m, D_m', B_m',

($D_m' = dD_m/dz$ и т. д.) системе линейных уравнений, которые получатся, если потребовать выполнения равенства

$$\partial\Psi/\partial z = \sum_m ih_m\left(-D_m e^{-i\gamma_m} + B_m e^{i\gamma_m}\right) h_m^{-1/2}\psi_m. \qquad (11)$$

Вторая система уравнений получится при подстановке в (2). Величину $\partial^2\Psi/\partial z^2$ надо вычислять по (11); при определении $\nabla^2\Psi$ надо иметь в виду, что так как Ψ и ψ_m удовлетворяют одинаковым граничным условиям, то к ряду (8) допустимо почленное применение оператора ∇^2.

Разрешая обе системы относительно D_p' и B_p' получим

$$D_p' = \frac{h_p'}{2h_p} B_p e^{2i\gamma_p} - \frac{1}{2h_p}\sum_{m\neq p}\beta_{mp}\left[(h_p + h_m) D_m e^{-i(\gamma_m-\gamma_p)} + \right.$$
$$\left. + (h_p - h_m) B_m e^{i(\gamma_m+\gamma_p)}\right]\left(\frac{h_p}{h_m}\right)^{1/2};$$

$$B_m' = \frac{h_p'}{2h_p} D_p e^{-2i\gamma_p} - \frac{1}{2h_p}\sum_{m\neq p}\beta_{mp}\left[(h_p - h_m) D_m e^{-i(\gamma_m+\gamma_p)} + \right.$$
$$\left. + (h_p + h_m) B_m e^{i(\gamma_m-\gamma_p)}\right]\left(\frac{h_p}{h_m}\right)^{1/2} * . \qquad (12)$$

6. Систему (12) надо решать при граничных условиях, определяемых характером полей с обеих сторон нерегулярного волновода. В регулярных участках D_p и B_p суть амплитуды волн, идущих, соответственно, слева направо и справа налево. Пусть нерегулярный участок занимает область от $z = 0$ до $z = L$ и слева падает волна, которой мы присвоим номер $p = 0$; тогда

$$D_0 = 1, \quad D_p = 0, \quad p \neq 0 \text{ при } z = 0; \quad B_p = 0 \text{ при } z = L. \qquad (13)$$

Система (12) может быть использована для численных расчетов нерегулярных волноводов. Так как граничные условия (13) ставятся на обоих концах интервала, то численное интегрирование следует производить при различных граничных условиях типа $D_p = 1$, $B_p = 0$ и $D_p = 0$, $B_p = 1$ при $z = 0$ и затем формировать такую линейную комбинацию решений, которая удовлетворяет условию (13). Для численных расчетов система (12) может быть несколько упрощена введением других переменных, пропорциональных $D_p(z)$ и $B_p(z)$.

7. Система (12) обладает следующей особенностью, обязанной введению множителей $h_m^{-1/2}$ и $e^{\pm i\gamma_m}$ и разложении (7): в правой части отсутствуют слагаемые с D_p (в уравнении для D_p') и с B_p (в уравнении для B_p') и все члены имеют осциллирующий характер. Поэтому для волноводов с медленно меняющимся сечением, для которых h_p' и β_{mp} содержат геометрический малый параметр μ (например, средний угол, образованный поверхностью металла с осью z), удобно разлагать искомые функции D_p, B_p в ряд по этому малому параметру и, что особенно важно, в первом порядке по μ эти разложения останутся

---

* Предложенный метод в некоторых отношениях аналогичен методу Стивенсона. В статье, посвященной волнам в электромагнитных рупорах ([1]), Стивенсон также вводил систему мембранных функций, определенных в сечениях $z = \text{const}$. Он пользовался разложением, отличным от (7), и получил систему обыкновенных уравнений второго (а не первого, как (12)) порядка.

справедливыми также при больших L. Если подставить такое разложение

$$D_0 = D_0^{(0)} + \mu D_0^{(1)} + \mu^2 D_0^{(2)}; \quad D_p = D_p^{(0)} + \mu D_p^{(1)}; \quad B_p = B_p^{(0)} + \mu B_p^{(1)} \quad (14)$$

в систему (12), (13), то получится

$$D_0^{(0)} = 1; \quad D_0^{(1)} = 0; \quad D_p^{(0)} = 0 \ (p = 1, 2, \ldots); \quad B_p^{(0)} = 0 \ (p = 0, 1, 2, \ldots). \quad (15)$$

Поток энергии в волноводе, переносимый m-й волной, пропорционален $h_m \alpha_m^2 \int \psi_m^2 \, dS$; поэтому (15) означает, что в старшем порядке после прохождения через нерегулярный участок прошедшая волна с $p = 0$ имеет ту же энергию, что и падающая, а фаза ее определяется множителем $\exp\left\{-i \int_0^L h_0 \, dz\right\}$. Амплитуды отраженной волны и всех паразитных волн, расходящихся в обе стороны от нерегулярного участка, пропорциональны μ. Согласно (12) и (15) амплитуды возвращающихся волн, т. е. значения коэффициентов B_p при $z = 0$, будут в старшем порядке (первом по μ)

$$\mu B_p^{(1)} = \int_0^L \beta_{0p} \frac{h_0 - h_p}{2\sqrt{h_0 h_p}} e^{-i(\gamma_0 + \gamma_p)} dz, \ p \neq 0; \quad \mu B_0^{(1)} = -\int_0^L \frac{h_0'}{2h_0} e^{-2i\gamma_0} dz, \quad (16)$$

а амплитуды прошедших волн (т. е. $D_p(L)$) будут

$$\mu D_p^{(1)} = \int_0^L \beta_{p0} \frac{h_0 + h_p}{2\sqrt{h_0 h_p}} e^{-i(\gamma_0 - \gamma_p)} dz, \quad p \neq 0. \quad (17)$$

Если сечения волновода — окружности переменного радиуса $a(z)$, то, подставляя (10), получим для этих величин выражение

$$-\lambda_0 \lambda_p \int_0^L \frac{a'}{a^3} \frac{1}{h_0 \pm h_p} \frac{1}{\sqrt{h_0 h_p}} e^{-i(\gamma_0 \pm \gamma_p)} dz, \quad (18)$$

где верхний знак относится к B_p ($p = 0, 1, 2, \ldots$), нижний — к D_p ($p = 1, 2, \ldots$). Энергии, уносимые этими волнами, пропорциональны квадрату модуля амплитуд (18); суммарную энергию всех этих волн можно также найти, определяя $D_0^{(2)}$. Существенно, что выражения (16)—(18) вследствие наличия осциллирующих или затухающих множителей остаются справедливыми для больших L, так что величина $kL \cdot \mu$ (например, разность радиусов обоих концов конусного перехода, деленная на длину волны) может быть конечной величиной. Для любого конуса, т. е. любой заданной функции $a(z)$, определение амплитуд (18) сводится к квадратурам.

Формулы (16)—(18) решают поставленную задачу; они справедливы также и в том случае, когда в области интегрирования одно или несколько h_p ($p \neq 0$) обращаются в нуль — амплитуды соответствующих волн остаются конечными. Случай, когда h_0 обращается в нуль (сужающийся конус), нуждается в дальнейшем исследовании; аналогичные вопросы возникают при рассмотрении так называемого туннельного эффекта.

Институт радиотехники и электроники
Академии наук СССР

Поступило
14 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Stevenson, J. Appl. Phys., **22**, № 12, 1447 (1951).