Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МЕХАНИКА

Д. И. МАНЖЕРОН

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ СОМОВА ОБ УСКОРЕНИЯХ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 29 X 1954)

1. Пусть положение точки в трехмерном евклидовом пространстве характеризуется обобщенными координатами (q_1, q_2, q_3) (1). Обозначим через $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ единичные векторы касательных к координатным линиям и через s_i — их дуги.

Имеем для всех трех систем координатных линий:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_i} = \mathbf{e}_i, \quad ds_i = H_i dq_i, \quad H_i = H_i(q_1, q_2, q_3), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

и для произвольной кривой, описываемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} H_i \mathbf{e}_i dq_i, \quad a_{ik} = H_i H_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} dq_i dq_k.$$

Введем в рассмотрение функции

$$T = \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad T_1 = \frac{\mathbf{w}^2}{2} = \frac{(\mathbf{w}^{(1)})^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2,$$

$$T_n = \frac{(\mathbf{w}^{(n)})^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{w}^{(n-1)}}{dt}\right)^2 \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

2. Обозначая через $w_i^{(n)}$ ортогональные проекции вектора $\mathbf{w}^{(n)}$ на оси, соответствующие ортам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е. полагая $w_i^{(n)} = \mathbf{w}^{(n)} \cdot \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, находим следующую рекуррентную формулу, выражающую ускорения различных порядков:

$$w_i^{(n)} = \frac{1}{H_i}\left\{\frac{d}{dt}\left(H_i w_i^{(n-1)}\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial T_{n-1}}{\partial q_i^{(n-1)}}\right\} \quad (i = 1, 2, 3;\ n = 2, 3, \ldots). \quad (1)$$

Доказательство основывается на рассмотрении произведения

$$H_i w_i^{(n)} = H_i \mathbf{w}^{(n)} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{d}{dt}\left(H_i w_i^{(n-1)}\right) - \mathbf{w}^{(n-1)} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \quad (а)$$

и на справедливости равенства

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{1}{n}\frac{\partial \mathbf{w}^{(n-1)}}{\partial q_i^{(n-1)}} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 2, 3, \ldots), \quad (б)$$

устанавливаемого применением метода полной индукции к равенствам

$$\mathbf{w}^{(n)} = (\ldots) + n \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} q_i^{(n)} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} q_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} q_i^{(n+1)}, \qquad (в)$$

где $(\ldots)$ означает совокупность членов, содержащих производные обобщенных координат по времени порядка не выше $(n-1)$-го.

3. В предположении, что обобщенные координатные линии ортогональны, формула, выражающая ускорения различных порядков, записывается в матричных обозначениях:

$$\begin{Vmatrix} w_1^{(n)} \\ w_2^{(n)} \\ w_3^{(n)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & D & \alpha_{23} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & D \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} w_1^{(n-1)} \\ w_2^{(n-1)} \\ w_3^{(n-1)} \end{Vmatrix} \quad (n = 2, 3, \ldots), \qquad (2)$$

где элементы кососимметричной матрицы третьего порядка

$$\alpha_{12} = \frac{H_1}{H_2} \frac{(\dot{\mathbf{r}}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})}{(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})} = -\frac{H_2}{H_1} \frac{(\mathbf{r}_{q_1} \dot{\mathbf{r}}_{q_1} \mathbf{r}_{q_3})}{(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})};$$

$$\alpha_{13} = \frac{H_1}{H_3} \frac{(\mathbf{r}_{q_1} \dot{\mathbf{r}}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})}{(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})} = -\frac{H_3}{H_1} \frac{(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \dot{\mathbf{r}}_{q_3})}{(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})};$$

$$\alpha_{23} = \frac{H_2}{H_3} \frac{(\mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_1} \dot{\mathbf{r}}_{q_3})}{(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})} = -\frac{H_3}{H_2} \frac{(\mathbf{r}_{q_1} \dot{\mathbf{r}}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})}{(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})};$$

$D \equiv \frac{d}{dt}$, $\mathbf{r}_{q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$ и $(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})$, $(\dot{\mathbf{r}}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3})$, ... — сложные векторные произведения, как например: $(\mathbf{r}_{q_1} \mathbf{r}_{q_2} \mathbf{r}_{q_3}) = \mathbf{r}_{q_1} \cdot (\mathbf{r}_{q_2} \times \mathbf{r}_{q_3})$.

4. Формулы (1) и (2) пополняют совокупность элегантных уравнений:

$$\mathbf{r}_a^{(n)} = \mathbf{r}_r^{(n)} + \mathbf{r}_e^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \beta_i \mathbf{r}_r^{(n-i)},$$

$$\beta_n = \beta_{n-1}\beta_1 + \dot{\beta}_{n-1}, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 \equiv \bar{\omega} \times (n = 2, 3, \ldots); \qquad (3)$$

$$\begin{Vmatrix} w_\tau^{(m)} \\ w_n^{(m)} \\ w_b^{(m)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D & -\frac{v}{\rho} & 0 \\ \frac{v}{\rho} & D & -\frac{v}{\varkappa} \\ 0 & \frac{v}{\varkappa} & D \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} w_\tau^{(m-1)} \\ w_n^{(m-1)} \\ w_b^{(m-1)} \end{Vmatrix} \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (4)$$

найденных по существу О. И. Сомовым [2] — основоположником систематического введения векторного метода трактовки теоретической механики, выражающих, соответственно, ускорения различных порядков в сложном движении [3] и ускорения любого порядка m на оси основного трехгранника.

5. Полученные результаты могут быть обобщены на некоторые пространства, интересующие современные теории относительности, как например пространства постоянной кривизны любого знака.

Ясский политехнический институт
Яссы, Румынская народная республика

Поступило
5 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] См., например, Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье, Курс теоретической механики, ч. 1, Л.—М., 1948, стр. 242—250. [2] Я. Л. Геронимус, Очерки о работах корифеев русской механики, М., 1952, стр. 85—88. [3] А. И. Некрасов, Курс теоретической механики, 2, М., 1953, стр. 363—371.