Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

М. П. ЩЕГЛОВ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 II 1955)

Пусть задан класс рядов $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right\}$ (a_n — действительные числа) с ограниченными частными суммами, т. е.

$$s_n \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = O(1);$$

назовем его L.

Возьмем преобразование Чезаро

$$\sigma_n \equiv \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu$$

и преобразование Пуассона в форме

$$\varphi(u) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n/u}.$$

Определим числа:

$$\underline{\lim}\, s_n = d, \quad \overline{\lim}\, s_n = D \qquad (n \to \infty);$$

$$\underline{\lim}\, \sigma_n = d', \quad \overline{\lim}\, \sigma_n = D' \qquad (n \to \infty);$$

$$\underline{\lim}\, \varphi(u) = d'', \quad \overline{\lim}\, \varphi(u) = D'' \quad (u \to \infty).$$

Эти числа связаны соотношением ([1], стр. 46—50)

$$-\infty < d \leqslant d' \leqslant d'' \leqslant D'' \leqslant D' \leqslant D < +\infty.$$

Назовем W и W_+ классы рядов $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right\}$, удовлетворяющие условиям:

1°. Они принадлежат L.

2°. Разность $\omega = D - d$ играет роль заданного параметра, причем $0 < \omega < \infty$.

Кроме того, W и W_+ удовлетворяют, соответственно, условиям*:

3°. $a_n < \frac{C}{n}$ и $|a_n| < \frac{C}{n}$, где $0 < C < \infty$.

Очевидно, $W \supset W_+$.

Настоящая заметка посвящена изучению следующих разностей (функций, зависящих от аргументов C и ω):

$$r = \sup_W \{d' - d\}; \quad R = \sup_W \{D - D'\}; \quad p = \sup_W \{d'' - d\}; \quad P = \sup_W \{D - D''\}$$

и аналогичных величин r_+, R_+, p_+, P_+ для класса W_+. Эти функции, очевидно, не зависят от d (или D). Можно показать, что $0 < r < p < \omega$, $0 < R < P < \omega$ и такие же неравенства для величин со знаком $+$.

* Условия 3° рассматривали Харди и Литтльвуд ([2]).

Теорема 1.

а) $r = C \lg \frac{C+\omega}{C}$;

б) $p = \omega(1 - e^{-\lambda}) + C \int\limits_{\lambda}^{\lambda e^{\omega/C}} \frac{e^{-x}}{x} dx$, *где* λ *— положительный корень уравнения* $e^{x(1-e^{\omega/C})} = 1 - \frac{\omega}{C} x$.

В качестве следствия получаем:

Теорема 1′.

а) $r \to 0$, $p \to 0$ *при* $C \to 0$; б) $r \to \omega$, $p \to \omega$ *при* $C \to \infty$;

в) $r = C \lg \frac{\omega}{C} + o(1)$, $p = C\left[\lg \frac{\omega}{C} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot n!} + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx\right] + o(1)$ *при* $\omega \to \infty$.

Теорема 2.

а) $R = C(1 - e^{-\omega/C})$;

б) $P = \omega(1 + e^{-\mu}) - C \int\limits_{\mu e^{-\omega/C}}^{\mu} \frac{e^{-x}}{x} dx$, *где* μ *— положительный корень уравнения* $e^{x(1-e^{-\omega/C})} = 1 + \frac{\omega}{C} x$.

Из этой теоремы следует

Теорема 2′.

а) $R \to 0$, $P \to 0$ *при* $C \to 0$; б) $R \to \omega$, $P \to \omega$ *при* $C \to \infty$;

в) $R \to C$, $P = C\left[\lg \lg \frac{\omega}{C} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot n!} - \int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx\right] + o(1)$ *при* $\omega \to \infty$.

Теорема 3.

а) $r_+ = R_+ = C \lg(2e^{\omega/C} - 1) - \omega$;

б) $p_+ = P_+ = \omega - C\left[\int\limits_{\varkappa e^{-\omega/C}}^{\varkappa} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int\limits_{\varkappa}^{\varkappa e^{\omega/C}} \frac{e^{-x}}{x} dx\right]$, *где* $\varkappa$ *— положительный корень уравнения* $e^{x(1-e^{-\omega/C})} + e^{x(1-e^{\omega/C})} = 2$.

Отсюда вытекает

Теорема 3′. *Выполняются соотношения вида* а) *и* б) *из теорем* 1′ *и* 2′ *и справедливы соотношения*

в) $r_+ = R_+ \to C \lg 2$, $p_+ = P_+ \to C\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lg^n 2}{n \cdot n!} + \int\limits_{\lg 2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx\right]$ *при* $\omega \to \infty$.

Основу доказательства теорем 1, 2 и 3 составляют построение и исследование «экстремальных функций»*. Возникают вопросы:

1) Определить величины

$q = \sup\limits_{H} \{d'' - d'\}$ и $Q = \sup\limits_{H} \{D' - D''\}$ в случаях $H = W$, $H = W_+$.

2) Для каких множеств $H (\subseteq L)$ справедливы равенства

$q = \sup\{d^u - d\} - \sup\{d' - d\}$, $Q = \sup\{D - D''\} - \sup\{D - D'\}$.

(sup берется по множеству H).

Московский
физико-технический институт

Поступило
13 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939. [2] Г. Харди, Расходящиеся ряды, 1951. [3] М. П. Щеглов, Матем. сборн., 28 (70):2 (1951).

* Использованы некоторые типы конструкций, имеющиеся в работе ([3]).