Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. И. ШИЛОВА

СУЩЕСТВОВАНИЕ АБСОЛЮТНОГО МИНИМУМА КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 III 1955)

В настоящей заметке рассматривается вопрос о существовании абсолютного минимума интегралов вида

$$\int_{\Omega} F(x^1, x^2, \ldots, x^n, f, p^1, p^2, \ldots, p^n)d\Omega,$$

где

$$p^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad d\Omega = dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Этой задаче посвящены работы ([1-4]). С. Н. Бернштейн ([1]) доказал существование аналитических решений при $n = 2$ для подинтегральных выражений, подчиненных специальным условиям. Из этой работы, в частности, следует, что, если минимум существует при любых граничных данных, то подинтегральное выражение F должно иметь определенный порядок роста относительно $|\operatorname{grad} f|$ при $|\operatorname{grad} f| \to \infty$.

В соответствии с этим мы подчиняем F условию

$$F(x, f, p) = F(x^1, x^2, \ldots, x^n, f, p^1, \ldots, p^n) \geqslant m\left\{\sum_{i=1}^{n}(p^i)^2\right\}^{\alpha/2}, \qquad (1)$$

где α и m — положительные числа, не зависящие от аргументов $x^1, x^2, \ldots, x^n, f, p^1, p^2, \ldots, p^n$.

Тонелли ([2]) доказал существование непрерывных решений при $n = 2$ и $\alpha > 2$. Моррей ([3]) доказал существование обобщенных решений при условиях, которые содержат, в частности, условие (1) с $\alpha > 1$. Из результатов Моррея и из теорем вложения С. Л. Соболева следует существование непрерывных решений при $\alpha > 2$.

В работе А. Г. Сигалова ([4]) доказывается существование непрерывных решений при $n = \alpha = 2$. Заметим, что при $n = \alpha = 1$ непрерывных решений, вообще говоря, не существует.

В этой заметке дается краткое изложение доказательства существования непрерывных решений при $\alpha = n > 2$.

1. Пусть $\bar{G}$ — замкнутая ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R_n, $n > 2$. Обозначим через G' границу этой области. Будем говорить, что область G имеет равномерно регулярную границу, если существует такое $\delta > 0$, что каждая n-мерная сфера радиуса меньше δ не содержит внутри ни одной компоненты границы G'. Функцию $f(x)$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \bar{G}$, отнесем классу A^α, $\alpha > 1$, если она непрерывна по совокупности переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в $\bar{G}$; при

$n=1$ абсолютно непрерывна в обычном смысле, причем $\int\limits_G |f'(x)|^\alpha dx < +\infty$, а при $n>1$ определяется индуктивно свойствами:

а) $f(x)$ принадлежит классу A^α по $x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n$ для почти всех значений x^i;

б) $\int\limits_G \sum\limits_{i=1}^{n} |p^i|^\alpha d\Omega < +\infty$.

Функцию $f(x)$, $x \in \bar{G}$, будем называть кусочно-линейной, если:

а) $\bar{G}$ есть сумма конечного числа n-мерных симплексов;

б) $f(x)$ непрерывна в $\bar{G}$;

в) существует такое симплициальное подразделение области G: $q_1, q_2, \ldots, q_m$, что в каждом симплексе q_i функция $f(x)$ линейна.

Множество точек $\{x^1, x^2, \ldots, x^n, f\}$, где $x \in G'$, обозначим $\{f, G'\}$. Введем расстояние $r'(f_1, f_2)$ между графиками функций $f_1(x)$, $x \in \bar{G}_1$, и $f_2(x)$, $x \in \bar{G}_2$, на границе следующим образом:

$$r'(f_1, f_2) = r(\{f_1, G_1'\}, \{f_2, G_2'\}),$$

где

$$r(E_1, E_2) = \max\{\rho(E_1, E_2), \rho(E_2, E_1)\},$$

причем

$$\rho(E_i, E_j) = \sup_{P_1 \in E_i} \{\inf_{P_2 \in E_j} \| P_1 - P_2 \|\},$$

а $\| P_1 - P_2 \|$ — обычное евклидово расстояние.

2. Основная теорема. *Пусть $\bar{G} \subset R_n, n>2$, — ограниченная область с равномерно регулярной границей. $\psi(x)$ определена и непрерывна на G', $|\psi| \leqslant M$. Пусть функции $F(f, x, p)$, $F_p{}^i(x, f, p)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определены и непрерывны при $x \in \bar{G}$, $|f| \leqslant M$, p^i произвольных, а также удовлетворяют условиям:*

а) *существуют два числа $m>0$ и $C>0$ такие, что из $x \in \bar{G}$, $|f| \leqslant M$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} (p^i)^2 \geqslant C$ следует (1) при $\alpha = n$;*

б) $\mathscr{E}(x, p, \bar{p}) = F(x, f, p) - F(x, f, \bar{p}) - \sum\limits_{i=1}^{n} (p^i - \bar{p}^i) F_{p^i}(x, f, \bar{p}) \geqslant 0$

для $x \in \bar{G}$, $|f| \leqslant M$ и p, $\bar{p}$ произвольных;

в) *существуют непрерывная выпуклая функция $\varphi(p)$ и постоянные A_1 и A_2 такие, что*

$$A_1 \varphi(p) \leqslant F(x, f, p) \leqslant A_2 \varphi(p)$$

для $x \in G$, $|f| \leqslant M$, p произвольных.

Функцию $f(x)$ будем называть допустимой, если $f(x)$, $x \in \bar{G}$ принадлежит классу A^n, $|f| \leqslant M$, $f(x) = \psi(x)$ при $x \in G'$ и $(f, G, F) = \int\limits_G F(x, f, p)\, d\Omega < +\infty$.

Если существует, по крайней мере, одна допустимая функция, то существует допустимая функция $f_0(x)$, дающая интегралу (f, G, F) абсолютный минимум в классе всех допустимых функций. При этом

$$(f_0, G, F) = \inf\{\lim_{k \to \infty} (f_k, G_k, F)\},$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям кусочно-линейных функций $f_k(x)$, $x \in \bar{G}_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, *для которых* $r'(f_k, f_0) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

3. Доказательство теоремы п. 2 проводится по классической схеме, сводящейся к построению равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной минимизирующей последовательности и к доказательству полунепрерывности интеграла. Построение равностепенно непрерывной минимизирующей последовательности опирается на исправление произвольной минимизирующей последовательности кусочно-линейных функций, проводимой так же, как в работе ([4]), и на следующую ниже теорему о выборе.

4. Область $G_c \subset \bar{G}$ будем называть основной для функции $f(x)$, $x \in G$, если она есть компонента множества $E(f < c)$ или $E(f > c)$, все точки которой являются внутренними точками области G.

Теорема о выборе. *Пусть последовательность кусочно-линейных функций* $f_k(x)$, $x \in G_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *обладает следующими свойствами*:

а) $\bar{G}_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$; G — *ограниченная область с равномерно регулярной границей*;

б) $\int\limits_{G_k} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} (p_k^i)^2 \right]^{n/2} d\Omega \leqslant C_1$, $k = 1, 2, \ldots$;

в) $r'(f_k, \psi) \to 0$ *при* $k \to \infty$, *где* ψ — *заданная на* G' *непрерывная функция*;

г) *существует такое* $q > 0$, *что* $\dfrac{1}{M(G_c)} \int\limits_{G_c} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} (p_k^i)^2 \right]^{1/2} d\Omega \leqslant q$, $k = 1, 2, \ldots$ *для любой основной области* G_c *функции* f_k.

Тогда функции $f_k(x)$, $x \in G_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *равностепенно непрерывны и равномерно ограничены.*

5. Доказательсто теоремы о выборе опирается на обобщение теоремы Л. Юнга о существовании $\varepsilon - \delta$-решеток и на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть функции* $f_k(x)$, $x \in \bar{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют условиям теоремы о выборе. Тогда для любого* k *и любой области* $D \in G_k$ *выполняются неравенства:*

$$\inf_{x \in D} f(x) - \inf_{x \in D} f(x) \leqslant q w_n^{-1/n} [M(D)]^{1/n};$$

$$\sup_{x \in D} f(x) - \sup_{x \in D'} f(x) \leqslant q w_n^{-1/n} [M(D)]^{1/n},$$

где w_n — *объем* n-*мерной единичной сферы.*

Лемма 2. *Пусть* D — *произвольная* $n-1$-*мерная область на поверхности* n-*мерного параллелепипеда*:

$\Pi_n = \{a^i \leqslant x^i \leqslant b^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\delta \leqslant b^i - a^i \leqslant 2\delta$, $0 < \delta < \infty$, *граница которой состоит из конечного числа* $n-2$-*мерных симплексов.*

Тогда выполняется по крайней мере одно из следующих двух неравенств:

А. $M(D) \leqslant M_1 [M(D')]^{\frac{n-1}{n-2}}$,

Б. $M(CD) \leqslant M_1 [M(D')]^{\frac{n-1}{n-2}}$,

где $CD = \Pi_n' - D$.

Постоянная M_1 *не зависит от* δ *и от* a^i *и* b^i; $i = 1, 2, \ldots$

Лемма 3. *Пусть* D — *пересеченные границы* n-*мерного параллелепипеда*

$$\Pi_n = \{a^i \leqslant x^i \leqslant b^i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \delta \leqslant b^i - a^i \leqslant 2\delta, \quad 0 < \delta < \infty,$$

с областью G.

Пусть, далее, $f(x)$, $x \in G$, — *кусочно-линейная функция. Если*

$$\int_D \left[\sum_{i=1}^{n} (p^i)^2 \right]^{\alpha/2} d\Omega \leqslant C_2$$

и если колебание функции на границе D' *меньше* ε, *то колебание функции* $f(x)$ *на множестве* $\bar{D}$ *меньше*

$$\varepsilon + 4C_2^{\frac{1}{\alpha}} M_1 \frac{n\alpha}{\alpha - n + 1} [M(\Pi_n')]^{\frac{\alpha - n + 1}{\alpha(n-1)}}.$$

Горьковский государственный университет

Поступило 17 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Усп. матем. наук, в. 832 (1941). [2] L. Tonelli, Ann. di Pisa, 2, 89 (1933). [3] C. Morrey, Univ. Calif., Publ. Math. (N. S.), I, 1 (1943). [4] А. Г. Сигалов, Тр. Московск. матем. общ., 2, 202 (1953).