Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

ШТЕФАН ШВАРЦ

ОБ УВЕЛИЧИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 XII 1954)

Пусть S — полугруппа. Скажем, что элемент $t \in S$ есть слева увеличительный элемент, если существует собственное подмножество $M \subset S$, $M \neq S$, такое, что имеет место $Mt = S$. Аналогично определяется справа увеличительный элемент полугруппы S. Понятие введено Е. С. Ляпиным, который поставил несколько проблем, касающихся этого понятия. Проблемы этого вида решаются в работе Н. Н. Воробьева ([1]).

Очевидно, что в конечной полугруппе не может существовать никакой левый (правый) увеличительный элемент. С другой стороны, легко построить примеры полугрупп, обладающих увеличительными элементами.

Целью этой заметки является доказательство утверждения, что в бикомпактной хаусдорфовой полугруппе не может существовать никакой слева (справа) увеличительный элемент.

Лемма 1. *Пусть S — бикомпактная хаусдорфова полугруппа. Пусть $t \in S$. Положим $T = \{t, t^2, t^3, \ldots\}$. Тогда замыкание $\overline{T}$ содержит один и только один идемпотент e.*

Доказательство. См., например, ([3]) или ([2]).

Лемма 2. *Пусть сохраняются предположения леммы 1. Тогда $\overline{T} \cdot e = G_e$ — группа, причем максимальная группа, содержащаяся в $\overline{T}$ и имеющая e своим единичным элементом.*

Доказательство. См. ([3]), лемма 6.

Лемма 3. *Пусть M — замкнутое подмножество из S и t — такой элемент из S, что $Mt = S$. Пусть e — идемпотент из $\overline{T}$. Тогда имеет также место равенство $Me = S$.*

Доказательство. Предположение $Mt = S$ влечет за собою, тем более, $St = S$. Следовательно, $Mt^2 = St = S$, $Mt^3 = St = S$, т. е. для всякого натурального $n \geqslant 1$ $Mt^n = S$.

Предположим теперь, что имеет место неравенство $Me \neq S$. Тогда существует такой элемент $x \in S$, что для всякого $y_\nu \in M$ имеет место $y_\nu e \neq x$. Для всякого ν существуют поэтому такие окрестности элементов $y_\nu e$, x, что справедливо $V(y_\nu e) \cap V(x) = \Lambda$. Ввиду непрерывности можно найти такие окрестности $U(y_\nu)$, $U_\nu(e)$, что имеет место $U(y_\nu) \cdot U_\nu(e) \subseteq V(y_\nu e)$. Следовательно, для всякого ν существуют такие окрестности $U(y_\nu)$, $U_\nu(e)$, что имеет место $x \notin U(y_\nu) \cdot U_\nu(e)$.

Рассмотрим сумму $\sum_{y_\nu \in M} U(y_\nu)$. Это соединение открытых множеств покрывает замкнутое (и, следовательно, бикомпактное) подмножество M. В силу этого существует конечная подсистема, покрывающая M,

$$M \subseteq U(y_{\nu_1}) + U(y_{\nu_2}) + \ldots + U(y_{\nu_k}).$$

Для всякого $U(y_{\nu_i})$, $i=1, 2, \ldots, k$, построим $U_{\nu_i}(e)$, обладающие свойством $x \notin U(y_{\nu_i}) \cdot U_{\nu_i}(e)$. Пусть, далее, $U(e)$ — такая окрестность e, что имеет место $U(e) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} U_{\nu_i}(e)$. Тогда справедливо

$$x \notin \sum_{i=1}^{k} U(y_{\nu_i}) \cdot U(e), \quad x \notin M \cdot U(e).$$

Так как $e \in \overline{T}$, то в окрестности $U(e)$ содержится элемент t^m для некоторого $m \geqslant 1$. Таким образом мы получили $x \notin M \cdot t^m$, что противоречит предположению.

Лемма 4. *Пусть для какого-нибудь подмножества $M \subseteq S$ имеет место $Mt = S$. Тогда идемпотент $e \in \overline{T} = \overline{\{t, t^2, t^3, \ldots\}}$ является правой единицей для всякого элемента из S.*

Доказательство. Если $Mt = S$, то также $St = S$. Так как S замкнуто в S, то, согласно лемме 3, имеет место $Se = S$. Следовательно, всякий $a \in S$ имеет вид $a = ue$, $u \in S$. Поэтому для всякого $a \in S$ имеет место $ae = ue \cdot e = ue = a$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Для всякого подмножества $A \subseteq S$ имеет место $Ae = A$.*

Лемма 5. *Пусть M — подмножество из S, которое удовлетворяет для некоторого $t \in S$ соотношению $Mt = S$. Тогда M — замкнутое подмножество из S.*

Доказательство. Пусть имеет место $Mt = S$. Пусть e — идемпотент из $\overline{T}$. Тогда справедливо также $Mte = Se$. Так как, в силу леммы 4, $Se = S$, то $Mte = S$. В силу леммы 2 элемент $g = te \in \overline{T} \cdot e$ принадлежит к некоторой группе G_e. Обозначим через g_1 тот элемент из G_e, для которого имеет место $gg_1 = e$. Тогда имеем постепенно: $Mg = S$, $Mgg_1 = Sg_1$, $Me = Sg_1$. Итак, ввиду следствия леммы 4, справедливо $M = Sg_1$.

Справедливость утверждения, что M — замкнутое подмножество из S, доказывается теперь, например, следующим образом. Топологическое произведение $S \times \{g_1\}$ (в силу теоремы Тихонова) — бикомпактное пространство. Множество Sg_1 — непрерывный образ пространства $S \times \{g_1\}$ в хаусдорфово пространство S. Итак, множество M — бикомпактное и замкнутое в S, что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Тогда S не содержит никакого слева или справа увеличительного элемента* *.*

Доказательство. Пусть для некоторого $t \in S$ и некоторого подмножества $M \neq S$ имеет место $Mt = S$. Обозначим символом e единственный идемпотент из $\overline{\{t, t^2, t^3, \ldots\}}$.

В силу леммы 5, M замкнуто в S. В силу леммы 3, $Me = S$. Ввиду следствия леммы 4, однако, справедливо $Me = M$. Следовательно, имеет место $M = S$. Это противоречит предположению, и наша теорема доказана.

Словацкая высшая техническая школа
Братислава

Поступило
21 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Воробьев, ДАН, 83, 641 (1952). [2] K. Numakura, Math. J. Okayama Univ., 1, 99 (1952). [3] Št. Schwarz, Чехословацк. матем. журн., 5 (80),1 (1955).

* Это значит, что единственное подмножество из S, которое удовлетворяет предположениям лемм 3, 4 и 5, — сама полугруппа S.