Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. Ф. ХАРАЗОВ

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 II 1955)

1. Пусть X — некоторое сепарабельное гильбертово пространство Рассмотрим уравнение

$$(E - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2) = y, \quad x \in X, \ y \in X, \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр; E — тождественный оператор; A_1 и A_2 — линейные операторы с конечной абсолютной нормой, отображающие X в себя. Пусть существует строго положительный самосопряженный линейный оператор H с конечной абсолютной нормой, отображающий X в себя такой, что $P_1 = HA_1$, $P_2 = HA_2$ — самосопряженные операторы. Кроме того считаем, что оператор A_2 может иметь только положительные собственные значения.

При указанных условиях уравнение

$$(E - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2)\, x = 0 \tag{2}$$

имеет только вещественные собственные значения ([1]).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность собственных значений уравнения (2), каждое из которых выписано столько раз, какова его кратность. Тогда последовательность соответствующих собственных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия обобщенной ортонормированности ([1]):

$$(Hx_i, \ x_k) + \lambda_i \lambda_k (P_2 x_i, \ x_k) = \delta_{i,k} \quad (i, \ k = 1, \ 2, \ldots). \tag{3}$$

2. В заметке ([1]) мы доказали справедливость следующих спектральных разложений:

1) при любом $f \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \ Hx_k)}{\lambda_k} Hx_k$ сходится слабо к $P_1 f$;

2) при любом $f \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \ P_2 x_k) Hx_k$ слабо сходится к $P_2 f$.

В настоящей заметке, пользуясь этими результатами, мы покажем, что имеют место более сильные предложения, а именно:

Теорема 1. *При любом* $f \in X$

$$P_1 f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, Hx_k)}{\lambda_k} Hx_k,$$

где ряд справа сходится по норме в X.

Теорема 2. *При любом* $f \in X$

$$P_2 f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, P_2 x_k) Hx_k,$$

где ряд справа сходится по норме в X.

Доказательство этих теорем основывается на следующих леммах:

Лемма 1. *Для любого* $f \in X$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(Hx_k,\ f)|^2}{\lambda_k^2} < +\infty.$$

Лемма 2. *Для любого* $f \in X$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(P_2 x_k,\ f)|^2 < +\infty.$$

Чтобы убедиться в справедливости лемм, для произвольных элементов $f \in X$ и $g \in X$ положим

$$\alpha_k = (Hx_k,\ g) + \lambda_k (P_2 x_k,\ f), \quad k = 1,\ 2, \ldots;$$

$$u = g - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k x_k, \quad u_1 = f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \bar{\alpha}_k x_k.$$

Подставляя u и u_1 в неравенство

$$(Hu,\ u) + (P_2 u_1,\ u_1) \geqslant 0,$$

найдем, что

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leqslant (Hg,\ g) + (P_2 f,\ f).$$

Полагая $f = 0$, из этого неравенства имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |(Hx_k, g)|^2 \leqslant (Hg,\ g),$$

что и завершает доказательство леммы 1 в силу того, что $|\lambda_k| \to \infty$ [1]. Полагая теперь $g = 0$, аналогично убеждаемся в справедливости леммы 2.

3. Перейдем теперь к доказательству теорем 1 и 2. Прежде всего заметим, что, в силу положительности H, из легко проверяемого тождества

$$\| H \| (Hx,\ Hx) =$$
$$= \| H \|^2 (Hx,\ x) - \{(H(\| H \| x - Hx),\ \| H \| x - Hx) +$$
$$+ \| H \| (Hx,\ Hx) - (H^2 x,\ Hx)\}$$

следует оценка

$$(Hx,\ Hx) \leqslant \| H \| (Hx,\ x). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что последовательность элементов

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f,\ Hx_k)}{\lambda_k} Hx_k \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

фундаментальна в X.

Полагая $f_k = \frac{(f, Hx_k)}{\lambda_k}$, в силу неравенства (4), условий (3) и положительности P_2, при $m > n$ имеем

$$\| z_m - z_n \|^2 \leqslant \| H \| \left(\sum_{k=n+1}^{m} f_k H x_k, \sum_{i=n+1}^{m} f_i x_i \right) \leqslant$$

$$\leqslant \| H \| \sum_{k=n+1}^{m} |f_k|^2 \{(Hx_k, x_k) + \lambda_k^2 (P_2 x_k, x_k)\} = \| H \| \sum_{k=n+1}^{m} |f_k|^2.$$

Отсюда, в силу леммы 1, убеждаемся, что элементы z_n составляют последовательность, фундаментальную в X. Отсюда, в силу слабой сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, Hx_k)}{\lambda_k} Hx_k$ к $P_1 f$ (1), следует справедливость теоремы 1.

Аналогично при помощи леммы 2 доказывается теорема 2.

На основании теорем 1 и 2 убеждаемся в справедливости следующего предложения:

Теорема 3. *Если λ не есть собственное значение уравнения* (2), *то для H-образа единственного решения уравнения* (1) *имеет место представление*

$$Hx = Hy + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, Hx_k)}{\lambda_k - \lambda} Hx_k,$$

где ряд справа сходится по норме в X.

4. В работе (2) мы изучили уравнение (1) в том случае, когда A_1 и A_2 — самосопряженные операторы, причем A_2 положителен. В этом случае имеют место следующие, аналогичные вышеуказанным, спектральные разложения:

1) при любом $f \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, x_k)/\lambda_k x_k$ слабо сходится к $A_1 f$;

2) при любом $f \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, A_2 x_k) x_k$ слабо сходится к $A_2 f$.

Эти предложения не являются частным случаем результатов, указанных выше, ибо тождественный оператор E, которым в рассматриваемом случае необходимо заменить оператор H, не является даже вполне непрерывным.

С другой стороны, при доказательстве лемм 1 и 2 и фундаментальности последовательности z_n мы воспользовались только положительностью оператора H. Следовательно, все эти рассуждения проходят и при $H = E$.

Таким образом, в случае, если A_1 и A_2 — самосопряженные операторы, имеют место следующие предложения:

Теорема 4. *При любом $f \in X$*

$$A_1 f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, x_k)}{\lambda_k} x_k,$$

где ряд справа сходится по норме в X.

Теорема 5. *При любом* $f \in X$

$$A_2 f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, A_2 x_k) x_k,$$

где ряд справа сходится по норме в X.

Теорема 6. *Если* λ *не есть собственное значение уравнения* (2), *то единственное решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$x = y + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, x_k)}{\lambda_k - \lambda} x_k.$$

5. Для частного случая, когда $A_2 = 0$ и вместо уравнения (1) рассматривается уравнение

$$(E - \lambda A_1) x = y,$$

теоремы 4 и 6 для самосопряженного вполне непрерывного оператора A_1 хорошо известны (см., например, ([3])), а теорема 1 для симметризуемого вполне непрерывного оператора A_1 доказана Райдом ([4]).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз. ССР

Поступило
20 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Ф. Харазов, ДАН, 91, № 5 (1953). [2] Д. Ф. Харазов, Тр. Тбилисск. матем. инст. 20 (1954). [3] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, М.—Л., стр. 384—388,. [4] W. T. Reid, Duke Math. J., 18, No. 1 (1951).