Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

ГЕЗА ФРЕЙД

ОДНОСТОРОННИЕ L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРЕМАМ ТАУБЕРОВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XII 1954)

Определение. Пусть $K_m(a, b)$ — класс функций, $m-1$ раз дифференцируемых на (a, b), и $f^{(m-1)}(x)$ — интеграл функции $\overline{f}_m(x)$ с ограниченной вариацией.

Теорема 1. *Пусть* $f \in K_m(a, b)$; *тогда существуют многочлены* $p_n(x)$ *и* $P_n(x)$ *степени* n, *удовлетворяющие соотношениям*

$$p_n(x) \leqslant f(x) \leqslant P_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b; \tag{1}$$

$$\int_a^b [P_n(x) - p_n x)] \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right). \tag{2}$$

Оценка (2) не может быть улучшена, даже если предположить, что $f^{(m)}(x)$ существует всюду, кроме особой точки c $(a < c < b)$, где она имеет разрыв первого рода, и удовлетворяет условию Lip 1 в интервалах (a, c) и (c, b) (1).

Дадим набросок доказательства. Обозначим

$$g_m(x, \xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \xi; \\ (x-\xi)^m, & \xi < x \leqslant b. \end{cases}$$

Из того, что $f \in K_\nu$, получаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{\overline{f}_m(a)}{m!}(x-a)^m + \frac{1}{m!}\int_a^b g_m(x, \xi)\, d\overline{f}^{(m)}(\xi),$$

так что достаточно доказать теорему 1 для $f(x) = g_m(x, \xi)$. Для четных m доказательство дано в предыдущей работе автора (2).

Можно положить $a = -1$, $b = +1$. Доказательство использует построение классических многочленов Маркова и Стильтьеса, известное из теории механических квадратур. Чтобы доказать теорему для нечетных m рассмотрим единственным образом определенные многочлены $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ степеней, соответственно, $2(n-r)-1$ и $2(n-r)-2$, которые достигают заданных значений, указанных на рис. 1, и производные которых имеют корни, указанные на том же рисунке, где $r = \frac{m+1}{2}$. Исследование многочлена дает

$$\begin{aligned} &\Phi_n(x) \leqslant 0 \leqslant \varphi_n(x) && -1 \leqslant x \leqslant x_{\mu n}; \\ &0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1 && x_{\mu n} \leqslant x \leqslant x_{\mu+r+1,\, n}; \\ &0 \leqslant \Phi_n(x) \leqslant 1 && x_{\mu n} \leqslant x \leqslant x_{\mu+r,n}; \\ &\Phi_n(x) \geqslant 1, \ x \geqslant x_{\mu+r,n} \text{ и } \varphi_n(x) \leqslant 1, \ x \geqslant x_{\mu+r+1,\, n}. \end{aligned}$$

Положим

$$x_{kn} = \arccos \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что

$$(x-\xi)^m \varphi_n(x) \leqslant g_m(x, \xi) \leqslant (x-\xi)^m \Phi_n(x)$$

для всех x, кроме $x \in (x_{\mu n}, x_{\mu+r, n})$, где второе неравенство неверно. Но в этом последнем интервале мы имеем

$$|\Phi_n(x)| \leqslant (x_{\mu+r,n} - x_{\mu n})^m \leqslant \left(\frac{r\pi}{n}\right)^m.$$

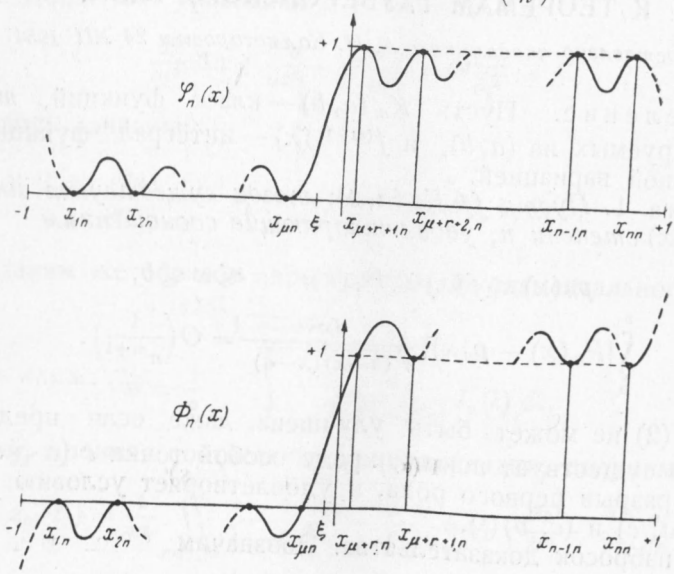


Рис. 1

Легко найти многочлен $\omega_n(x)$ степени n, удовлетворяющий неравенствам

$$\omega_n(x) \geqslant 1 \quad \text{при} \quad x_{\mu n} \leqslant x \leqslant x_{\mu+r,n}$$

и

$$\int_{-1}^{+1} \omega_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{c_2}{n},$$

где c_2 не зависит от n и ξ (соответственно μ).

Выбирая

$$p_{2n-1}(x) = \varphi_n(x), \quad P_{2n-1}(x) = \Phi_n(x) = c_1 n^{-m} \omega_n(x),$$

получим, что неравенство

$$p_{2n-1}(x) \leqslant g_m(x, \xi) \leqslant P_{2n-1}(x)$$

удовлетворяется для всех $x \in (-1, +1)$, и, применяя механическую квадратуру по абсциссам Чебышева, имеем

$$\int_{-1}^{+1} [P_{2n-1}(x) - p_{2n-1}(x)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= c_1 n^{-m} \int_{-1}^{+1} \frac{\omega_n(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+r} (x_{\nu n} - \xi)^m \left[\Phi_n(x_{\nu n}) - \varphi_n(x_{\nu n})\right] <$$

$$< \frac{c_1 c_2}{n^{m+1}} + \frac{\pi}{n} \left(\frac{r\pi}{n}\right)^m,$$

ч. т. д.

В силу теоремы С. Н. Бернштейна, из (2) получаем

$$P_{2n-1}(x) - p_{2n-1}(x) = O(n^{-m}),$$

так что, принимая во внимание (1), имеем

$$p_{2n-1}(x) = O(1) = P_{2n-1}(x).$$

Далее, из другой теоремы С. Н. Бернштейна следует, что сумма модулей коэффициентов $p_{2n-1}(x)$, соответственно $P_{2n-1}(x)$, есть ([3]) $O((\sqrt{2}+1)^{4n})$. При помощи метода, основанного на доказательстве Карамата теоремы Литтльвуда и подробно разработанного в работах автора ([2, 3]) (см. также ([1, 4, 5])), получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть $F(t)$ — неубывающая функция, определенная в $(0, \infty)$, и преобразование Лапласа — Стильтьеса*

$$F(s) = A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} [1 + O\{R(s)\}]$$

сходится для $\operatorname{Re} s > 0$. Пусть $\alpha \geqslant 1/2$. Если s стремится к нулю, принимая действительные значения, то

$$F(s) = A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} [1 + O\{R(s)\}].$$

Здесь $R(s)$ — монотонно убывающая функция, $R(0) = 0$ и

$$R(ks) < e^{c_3 k} R(s), \quad k = 2, 3, \ldots$$

Тогда $f \in K_m(0, 1)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty f(e^{-t/x})\, e^{-t/x}\, dF(t) =$$

$$= Ax^\alpha \left[\int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} f(x)\,dx + O\left\{\left[\log \frac{1}{R(1/x)}\right]^{-m-1}\right\}\right].$$

Условие $\alpha \geqslant 1/2$ можно заменить условием $\alpha > 0$, лишь бы только существовал интервал $(1-h, 1)$, в котором $f^{(m)}(x) \in \operatorname{Lip} 1$.

Институт прикладной математики
Академии наук Венгрии
Будапешт

Поступило
24 XII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Korevaar, Indag. Math., **15**, 281 (1953). [2] G. Freud, Acta Math. Ac. Sci. Hung., **3**, 299 (1952). [3] G. Freud, Acta Math. Ac. Sci. Hung., **2**, 299 (1951). [4] J. Korevaar, Indag. Math., **16**, 36 (1954). [5] А. Г. Постников, ДАН, **77**, 193 (1951).