Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 I 1955)

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v_y - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_x - \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z, \quad \alpha^2 \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} + \psi$$

в неограниченном пространстве переменных x, y, z, которая встречается в некоторых вопросах математической физики.

При помощи исключения неизвестных функций из системы (1) можно получить уравнения, которым будет удовлетворять каждая из неизвестных функций в отдельности:

$$Lp \equiv \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} = f, \quad L\mathbf{v} = \mathbf{f}, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$; $\mathbf{v}$ — вектор с компонентами v_x, v_y, v_z.

При $\alpha = 0$ система (1) и уравнение (2) переходят в систему и уравнение, рассмотренные С. Л. Соболевым ([1]), для которых им в явном виде решена задача Коши в неограниченном пространстве.

В настоящей работе строится в явном виде решение задачи Коши для системы (1) и уравнения (2) при $\alpha \neq 0$. Для этого рассматриваются характеристики системы (1) и находятся некоторые частные решения однородных уравнений (1) и (2), являющиеся фундаментальными. Применение формулы Грина дает возможность построить решение в явном виде. У системы (1) существуют характеристики двух родов. С одной стороны,— это характеристики волнового уравнения в 4-мерном пространстве, в частности, поверхность конуса

$$(t - t_0)^2 - \alpha^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] = 0.$$

С другой стороны, характеристиками системы (1) будут цилиндры с образующими, параллельными оси t, и с основаниями, представляющими собой произвольные области в 3-мерном пространстве x, y, z.

Заметим, что система (1) не является гиперболической, но задача Коши для нее поставлена равномерно корректно в смысле И. Г. Петровского ([2]).

Формула Грина для системы (1) записывается в виде:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left\{\int\limits_{0}^{t_0-\alpha r}[\mathbf{w},\mathbf{F})+\psi q]\,dt\right\}dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{\tau=-\alpha r}\Big[(\mathbf{w},\mathbf{v})+\alpha^2qp\Big]dx\,dy\,dz+(pw_x+v_xq)\,dy\,dz\,dt+$$

$$+(pw_y+v_yq)\,dx\,dz\,dt+(pw_z+v_zq)\,dx\,dy\,dt-$$

$$-\iint\limits_{S}\left[\int\limits_{0}^{t_0-\alpha r}(pw_n+qv_n)\,dt\right]dS-\iiint\limits_{\Omega}[(\mathbf{w},\mathbf{v})+\alpha^2qp]_{t=0}\,dx\,dy\,dz,\qquad(3)$$

где w_x, w_y, w_z, q — фундаментальные решения однородной системы (1); v_x, v_y, v_z, p — искомые решения неоднородной системы; $\tau=t-t_0$; Ω — область в 3-мерном пространстве переменных x, y, z.

Фундаментальные решения системы (1) строятся при помощи потенциальной функции Φ по формуле

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\left(\operatorname{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\times\mathbf{k}\right)+\mathbf{k}\cdot(\operatorname{grad}\Phi,\mathbf{k}),\qquad p=-\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3}-\frac{\partial\Phi}{\partial t},\qquad(4)$$

полученной С. Л. Соболевым для системы (1) при $\alpha=0$ и верной для системы (1) при $\alpha\neq0$. Потенциал Φ является частным решением уравнения

$$L\Phi\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\alpha^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^4\Phi}{\partial t^4}=0.$$

Такие частные решения даются формулами:

$$\Phi_{\mathrm{I}}=\Phi^{11}-\Phi^{12},\quad\Phi_{\mathrm{II}}=\Phi^{21}+\Phi^{22},\quad\Phi_{\mathrm{III}}\ \text{и}\ Q,\qquad(5)$$

где

$$\Phi^{11}=\frac{(x-x_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2}J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right),$$

$$\Phi^{12}=\frac{(y-y_0)(\tau^2-\alpha^2r^2)}{r\rho^2\tau}J_0\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right)-\frac{y-y_0}{\rho}\int\limits_{0}^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}}\frac{\xi(\xi^2+2\alpha^2\rho^2)}{(\xi^2+\alpha^2\rho^2)^{3/2}}J_0(\xi)\,d\xi,$$

$$\Phi^{21}=\frac{(y-y_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2}J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right),$$

$$\Phi^{22}=\frac{(x-x_0)(\tau^2-\alpha^2r^2)}{r\rho^2\tau}J_0\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right)-\frac{x-x_0}{\rho^3}\int\limits_{0}^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}}\frac{\xi(\xi^2+2\alpha^2\rho^2)}{(\xi^2+\alpha^2\rho^2)^{3/2}}J_0(\xi)\,d\xi,$$

$$\Phi^{\mathrm{III}}=\frac{(z-z_0)\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{\rho r^2}J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}\right),$$

$$Q=\frac{1}{\rho}\int\limits_{0}^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\alpha^2\rho^2}}J_0(\xi)\,d\xi;$$

здесь $\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$; $r^2=\rho^2+(z-z_0)^2$; J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Далее, как и в работе [1], вырежем точку x_0, y_0, z_0 из области Ω малым цилиндром $\rho\leqslant\eta$, $|z-z_0|\leqslant h$, и пусть оставшаяся область будет Ω^*. Обозначим

$$\text{Г. з. ц.}\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,d\Omega=\lim_{\eta\to0}\iiint\limits_{\Omega^*}f(x,y,z)\,d\Omega,$$

$$\text{Г. з. д.}\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,d\Omega=\lim_{h\to0}\iiint\limits_{\Omega^*}f(x,y,z)\,d\Omega.$$

Затем, строя по формуле (4) при помощи потенциалов (5) фундаментальные решения для системы (1), применяя формулу Грина (3), переходя при этом в первом интеграле правой части (3) к характеристическим координатам и используя некоторые соотношения на характеристическом конусе, получаем решение задачи Коши для системы (1) с начальными данными

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)|_{t=0} = \mathbf{v}^0(x, y, z), \quad p(x, y, z, t)|_{t=0} = p^0(x, y, z) \tag{6}$$

в виде

$$v_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{2} v_x(x_0, y_0, z_0, 0) -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{r=t_0/\alpha} \left\{ \left(\frac{x - x_0}{r^3} + \frac{\alpha(y - y_0)}{r^2} - \frac{\alpha^2 \rho^2 (x - x_0)}{2r^3} \right) v_n^0 + \right.$$
$$+ \frac{\alpha(x - x_0)}{r^3} [(x - x_0) v_y^0 - (y - y_0) v_x^0] +$$
$$+ \left[\frac{\alpha(x - x_0)}{r^3} - \frac{3\alpha(x - x_0)}{r^3} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\alpha^2 (y - y_0)}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\alpha^3 \rho^2 (x - x_0)}{2r^3} \frac{\partial r}{\partial n} \right] p^0 -$$
$$\left. - \frac{\alpha(x - x_0)}{r^2} \frac{\partial p^0}{\partial n} + \frac{x - x_0}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [\operatorname{div} \mathbf{v}^0 - \psi(x, y, z, 0)] \right\} dS +$$
$$+ \text{Г. з. ц.} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t_0/\alpha} [(\mathbf{w}^{\mathrm{I}}, \mathbf{v}) + \alpha^2 q^{\mathrm{I}} p)]_{t=0} dx\, dy\, dz + \frac{1}{2} \int\limits_0^{t_0} F_x(x_0, y_0, z_0, t)\, dt +$$
$$+ \text{Г. з. ц.} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t_0/\alpha} \left\{ \left(- \frac{x - x_0}{r^3} - \frac{\alpha(y - y_0)}{r^2} + \frac{\alpha^2 \rho^2 (x - x_0)}{2r^3} \right) N(x, y, z, t_0 - \alpha r) - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha(x - x_0)}{r^2} \chi(x, y, z, t_0 - \alpha r) \right\} dx\, dy\, dz +$$
$$+ \text{Г. з. ц.} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t_0/\alpha} \left\{ \int\limits_0^{t_0 - \alpha r} [(\mathbf{w}^{\mathrm{I}}, \mathbf{F}) + q^{\mathrm{I}} \psi]\, dt \right\} dx\, dy\, dz. \tag{7}$$

Значение v_y ввиду симметрии фундаментальных функций для v_x и v_y получается из (7) заменой y на $-y$, v_y на $-v_y$ и переменой ролей x и y.

$$v_z(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \text{Г. з. д.} \iiint\limits_{r \leqslant t_0/\alpha} \left\{ \int\limits_0^{t_0 - \alpha r} [(\mathbf{w}^{\mathrm{III}}, \mathbf{F}) + q^{\mathrm{III}} \psi] dt \right\} d\Omega -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{r=t_0/\alpha} \left\{ \left(\frac{z - z_0}{r^3} - \frac{\alpha^2 \rho^2 (z - z_0)}{2r^3} \right) v_n^0 + \frac{\alpha(x - x_0)(z - z_0)}{r^3} v_y^0 - \right.$$
$$- \frac{\alpha(y - y_0)(z - z_0)}{r^3} v_x^0 - \frac{\alpha(z - z_0)}{r^2} \frac{\partial p^0}{\partial n} + \frac{z - z_0}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [\operatorname{div} \mathbf{v}^0 - \psi(x, y, z, 0)] +$$
$$+ \frac{\alpha(z - z_0)}{r^3} p^0 + \left[\frac{\alpha^3 \rho^2 (z - z_0)}{2r^3} - \frac{3\alpha(z - z_0)}{r^3} \right] \frac{\partial r}{\partial n} p^0 \Big\} dS +$$
$$+ \text{Г. з. д.} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t_0/\alpha} \left\{ \left(\frac{z - z_0}{r^3} - \frac{\alpha^2 \rho^2 (z - z_0)}{2r^3} \right) N(x, y, z, t_0 - \alpha r) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha(z - z_0)}{r^2} \chi(x, y, z, t_0 - \alpha r) \right\} dx\, dy\, dz +$$
$$+ \text{Г. з. д.} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t_0/\alpha} [(\mathbf{w}^{\mathrm{III}}, \mathbf{v}) + \alpha^2 q^{\mathrm{III}} p]_{t=0} dx\, dy\, dz; \tag{8}$$

$$p(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{r=t_0/\alpha} \left\{ p^0 \frac{\partial (1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial p^0}{\partial n} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\alpha r} \frac{\partial r}{\partial n} [\psi(x, y, z, 0) - \operatorname{div} \mathbf{v}^0] - \frac{y - y_0}{r^2} v_x^0 + \frac{x - x_0}{r^2} v_y^0 - \right.$$

$$-\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}v_n^0+\frac{\alpha^2\rho^2}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial n}p^0\Big\}dS+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t_0/\alpha}\Big\{\frac{1}{r}\chi(x,y,z,t_0-\alpha r)-$$

$$-\frac{\alpha\rho^2}{2r^2}N(x,y,z,t_0-\alpha r)\Big\}dx\,dy\,dz-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t_0/\alpha}\left\{\int\limits_0^{t_0-\alpha r}[(\mathbf{w}^{\mathrm{IV}},\mathbf{F})+q^{\mathrm{IV}}\psi]\,dt\right\}dx\,dy\,dz-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t_0/\alpha}[(\mathbf{w}^{\mathrm{IV}},\mathbf{v})+\alpha^2q^{\mathrm{IV}}p]_{t=0}\,dx\,dy\,dz; \tag{9}$$

здесь N и χ выражаются через свободные члены системы (1).

Задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=f$$

с начальными данными

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\varphi_k(x,y,z);\quad k=0,1,2,3,$$

решается таким же образом при помощи фундаментального решения

$$w=\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\rho\sqrt{\tau^2-\alpha^2r^2}}{r}}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\alpha^2\rho^2}}J_0(\xi)\,d\xi.$$

При этом, проводя соответствующие выкладки, получим:

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{r\leqslant t_0/\alpha}\left\{-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}-\frac{\alpha}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_1+\left(\frac{\alpha^2\rho^2}{2r^2}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_0\right\}dS+$$

$$+\iiint\limits_{r\leqslant t_0/\alpha}\left\{\int\limits_0^{t_0-\alpha r}w\cdot f\,dt\right\}dx\,dy\,dz+$$

$$+\iiint\limits_{r\leqslant t_0/\alpha}\left\{\Delta\varphi_1 w-\Delta\varphi_0\frac{\partial w}{\partial t}+\alpha^2\varphi_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\right)-\right.$$

$$\left.-\alpha^2\varphi_1\left(w+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+\alpha^2\varphi_2\frac{\partial w}{\partial t}-\alpha^2\varphi_3 w\right\}_{t=0}dx\,dy\,dz. \tag{10}$$

Формулы (7) — (11) позволяют сделать некоторые заключения о качественном характере поведения решений уравнений (1) и (2), причем в этих решениях можно выполнить предельный переход при $\alpha\to 0$ [1].

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность научному руководителю акад. С. Л. Соболеву за большое внимание, помощь в работе и ценные советы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
26 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., 18, № 1 (1954). [2] И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, 1, в. 7 (1938).