Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

К. В. ЗАДИРАКА

ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ОЦЕНОК ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 7 III 1955)

§ 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} + Q(x)y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \ldots, y^{(2k-1)}(0) = y_0^{(2k-1)}. \tag{2}$$

Положив $M^{2k} = |\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l} Q(x)|$, $m^{2k} = |\min\limits_{0\leqslant x\leqslant l} Q(x)|$, представим дифференциальное уравнение (1) в форме

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} - M^{2k}y = -[M^{2k} + Q(x)]\,y. \tag{3}$$

Тогда интегрирование уравнения (3) при начальных условиях (2) эквивалентно решению интегрального уравнения Вольтерра

$$y(x) = \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2k}\left[\frac{e^{r_1 x}}{r_1^{2k-1}} + \frac{e^{r_2 x}}{r_2^{2k-1}} + \ldots + \frac{e^{r_{2k} x}}{r_{2k}^{2k-1}}\right] = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{M^{2k}x^{4k-1}}{(4k-1)!} + \ldots \tag{5}$$

есть частное решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (3), при начальных условиях

$$K(0) = K'(0) = \ldots = K^{(2k-2)}(0) = 0, \quad K^{(2k-1)}(0) = 1, \tag{6}$$

$r_j = Me^{j\pi i/k}$ — корни двучленного уравнения $r^{2k} - M^{2k} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, 2k)$, а $\underline{y}_0(x)$ — частное решение уравнения $y^{(2k)} - M^{2k}y = 0$ при начальных условиях (2).

Из (5) заключаем, что $K(x)$ есть вещественная неотрицательная функция в любом конечном промежутке изменения x.

В случае $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l} Q(x) \leqslant 0$ имеем $M^{2k} + Q(x) \leqslant 0$ и, следовательно, ядро интегрального уравнения (4) неположительно.

Пользуясь для решения интегрального уравнения (4) обычным итерационным процессом, получим для вычисления $n+1$-го прибли-

жения по n-му соотношению

$$y_{n+1}(x) = \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_n(\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

Отметим следующие свойства приближений, получаемых по рекуррентной формуле (7):

1. Если $y_n(x)$ есть верхнее приближение к искомому решению $y(x)$, то $y_{n+1}(x)$, вычисленное по рекуррентной формуле (7), является также верхним приближением по отношению к $y(x)$.

2. Производные любого верхнего приближения до порядка $2k-1$ включительно являются верхними приближениями к соответствующим производным решения $y(x)$.

3. Если верхнее приближение $y_1(x)$ представляет собой верхнюю функцию Чаплыгина ([1]), т. е.

$$y_1(x) \geqslant \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_1(\xi)\,d\xi \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

то приближение $y_2(x)$, вычисленное по рекуррентной формуле (7), будет также верхней функцией Чаплыгина, причем $y_2(x) \leqslant y_1(x)$. Взяв $y_2(x)$ за исходную верхнюю функцию, получим $y_3(x) \leqslant y_2(x)$, и т. д.

Как известно, используемый нами итерационный процесс для решения интегрального уравнения (4) является равномерно сходящимся для любого конечного промежутка $[0, l]$. Из третьего свойства заключаем, что последовательность верхних приближений монотонно сходится к искомому решению $y(x)$.

4. Последовательности производных верхних приближений до порядка $2k-1$ включительно монотонно сходятся к соответствующим производным искомого решения.

Свойства 1—4 легко доказываются при помощи рекуррентного соотношения (7). Аналогичные свойства имеют место для последовательности нижних приближений к решению $y(x)$.

Заметим, что в случае $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) > 0$ рекуррентное соотношение (7) не пригодно для построения верхних и нижних приближений, так как ядро интегрального уравнения (4) в этом случае знакопеременно.

Если $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) < 0$, $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) > 0$ или $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) = 0$, то, представив дифференциальное уравнение (1) в форме

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} - m^{2k}y = -[m^{2k} + Q(x)]\,y,$$

сведем интегрирование этого уравнения при начальных условиях (2) к решению интегрального уравнения

$$y(x) = \bar{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[m^{2k} + Q(\xi)]\,y(\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

где $\bar{y}_0(x)$ — частное решение уравнения $y^{(2k)} - m^{2k}y = 0$ при начальных условиях (2),

$$K(x) = \frac{1}{2k}\left[\frac{e^{r_1 x}}{r_1^{2k-1}} + \ldots + \frac{e^{r_{2k}x}}{r_{2k}^{2k-1}}\right] = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{m^{2k}x^{4k-1}}{(4k-1)!} + \ldots \quad (r_j = me^{j\pi i/k}). \tag{9}$$

Так как $K(x) \geqslant 0$, $m^{2k} + Q(x) \geqslant 0$, то ядро интегрального уравнения (8) неотрицательно и, пользуясь рекуррентной формулой

$$y_{n+1}(x) = \overline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[m^{2k} + Q(\xi)]\,y_n(\xi)\,d\xi, \qquad (10)$$

мы по заданному нижнему приближению получим верхнее, и наоборот. С этим изменением свойства 1—4 остаются в силе.

§ 2. Рассмотрим одномерную самосопряженную краевую задачу вида

$$(-1)^k \frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} + q(x)\,y = \lambda p(x)\,y \quad (0 \leqslant x \leqslant l); \qquad (11)$$

$$\sin\alpha_s y^s(0) + \cos\alpha_s y^{(2k-1-s)}(0) = 0; \qquad (12)$$

$$\sin\beta_s y^{(s)}(b) + \cos\beta_s y^{(2k-1-s)}(l) = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, k-1). \qquad (13)$$

Будем искать собственную функцию этой краевой задачи в виде

$$y(x,\lambda) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_3 y_2(x,\lambda) + \ldots + C_k y_k(x,\lambda), \qquad (14)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — линейно независимые решения уравнения (11), удовлетворяющие следующим начальным условиям в точке $x = 0$:

$$\begin{gathered}
y_1 = -\cos\alpha_0,\ y_1' = y_1'' = \ldots = y_1^{(2k-2)} = 0,\ y_1^{(2k-1)} = \sin\alpha_0;\\
y_2 = 0,\ y_2' = -\cos\alpha_1,\ y_2'' = \ldots = y_2^{(2k-3)} = 0,\ y_2^{(2k-2)} = \sin\alpha_1,\ y_2^{(2k-1)} = 0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (15)\\
y_k = y_k' = \ldots = y_k^{(k-2)} = 0,\ y_k^{(k-1)} = -\cos\alpha_{k-1},\quad y_k^{(k)} = \sin\alpha_{k-1},\\
y_k^{(k+1)} = \ldots = y_k^{(2k-1)} = 0.
\end{gathered}$$

Все эти k решений удовлетворяют граничным условиям (12).

Подставляя (14) в краевые условия (13), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
[\sin\beta_0 y_1(l,\lambda) + \cos\beta_0 y_1^{(2k-1)}(l,\lambda)]\,C_1 + \ldots\\
\ldots + [\sin\beta_0 y\ \ (l,\lambda) + \cos\beta_0 y_k^{(2k-1)}(l,\lambda)]\,C_k = 0;\\
[\sin\beta_1 y_1'(l,\lambda) + \cos\beta_1 y_1^{(2k-2)}(l,\lambda)]\,C_1 + \ldots\\
\ldots + [\sin\beta_1 y_k'(l,\lambda) + \cos\beta_1 y_k^{(2k-2)}(l,\lambda)]\,C_k = 0; \qquad (16)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[\sin\beta_{k-1} y_1^{(k-1)}(l,\lambda) + \cos\beta_{k-1} y_1^{k}\ (l,\lambda)]\,C_1 + \ldots\\
\ldots + [\sin\beta_{k-1} y_k^{(k-1)}(l,\lambda) + \cos\beta_{k-1} y_k^{(k)}(l,\lambda)]\,C_k = 0.
\end{gathered}$$

Так как для ненулевого решения $C_1, C_2, \ldots, C_k$ не могут одновременно обращаться в нуль, то собственные значения краевой задачи (11), (12), (13) определяются из уравнения

$$D(\lambda) = 0, \qquad (17)$$

где $D(\lambda)$ — определитель системы (16).

Построим в соответствии с рекуррентными соотношениями (7) при $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x,\lambda) \leqslant 0$ $(Q(x,\lambda) = q(x) - \lambda p(x))$ и (10) при $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) \leqslant 0$, $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) > 0$, $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) = 0$ последовательности верхних $\{\overline{y}_{ni}(x,\lambda)\}$

и нижних $\{\underline{y}_{ni}(x, \lambda)\}$ приближений, удовлетворяющие начальным условиям (15) (n — номер приближения, $i = 1, 2, \ldots, k$). Развернув определитель $D(\lambda)$, построим определитель $\overline{D}_n(\lambda)$, получающийся из $D(\lambda)$ заменой функций $y_i(l, \lambda)$ функциями $\overline{y}_{ni}(l, \lambda)$ при положительных коэффициентах и функциями $\underline{y}_{ni}(l, \lambda)$ при отрицательных коэффициентах и определитель $\underline{D}_n(\lambda)$, получающийся из $D(\lambda)$ заменой функций $y_i(l, \lambda)$ функциями $\underline{y}_{ni}(l, \lambda)$ при положительных коэффициентах и функциями $\overline{y}_{ni}(l, \lambda)$ при отрицательных коэффициентах.

Сопоставим теперь уравнению $D(\lambda) = 0$ следующие два уравнения:

$$\overline{D}_n(\lambda) = 0, \quad \underline{D}_n(\lambda) = 0. \tag{18}$$

Очевидно, имеют место неравенства

$$\underline{D}_n(\lambda) \leqslant D(\lambda) \leqslant \overline{D}_n(\lambda).$$

Как отмечено в § 1, при возрастании номера приближения n $\overline{y}_{ni}(x, \lambda)$, $\underline{y}_{ni}(x, \lambda)$ в промежутке $[0, l]$ монотонно стремятся к искомому решению $y(x, \lambda)$, а их производные по x до порядка $2k-1$ включительно монотонно стремятся к соответствующим производным по x от этого решения. Поэтому функции $\overline{D}_n(\lambda)$ и $\underline{D}_n(\lambda)$ монотонно стремятся (первая сверху, а вторая снизу) к функции $D(\lambda)$.

Тогда при любом j простому нулю $\lambda^{(j)}$ функции $D(\lambda)$ (т. е. простому j-му собственному значению) при достаточно большом n будут соответствовать нули $\underline{\lambda}_n^{(j)}$ и $\overline{\lambda}_n^{(j)}$ функций $\underline{D}_n(\lambda)$ и $\overline{D}_n(\lambda)$, сколь угодно близкие к $\lambda^{(j)}$, причем будут иметь место неравенства

$$\underline{\lambda}_n^{(j)} \leqslant \underline{\lambda}_{n+1}^{(j)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{(j)} \leqslant \ldots \leqslant \overline{\lambda}_{n+1}^{(j)} \leqslant \overline{\lambda}_n^{(j)}.$$

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
11 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Собр. соч., 1, 1948.