Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

В. Г. ЕГОРОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 III 1955)

В данной заметке рассматриваются вопросы устойчивости решений систем уравнений в полных дифференциалах. Следует отметить, что качественным исследованием решений подобных систем занимались В. В. Немыцкий (1) и Е. А. Барбашин (2,3).

Нетрудно заметить, что на рассматриваемые нами системы легко переносятся известные критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако рассмотрение систем уравнений в полных дифференциалах приводит к установлению существенно новых фактов, относящихся к вопросам устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, в этой заметке мы изучаем вопрос о влиянии условий интегрируемости на устойчивость систем обыкновенных дифференциальных уравнений некоторого специального вида.

Пусть дана система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_s = P_s(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)\,du + Q_s(v, x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dv \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где функции $P_s(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Q_s(v, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определены и непрерывны вместе с их производными $\partial P_s/\partial x_i$, $\partial Q_s/\partial x_i$ в некоторой области H:

$$u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{2}$$

и удовлетворяют в этой области условиям интегрируемости

$$\frac{\partial P_s}{\partial x_1} Q_1 + \frac{\partial P_s}{\partial x_2} Q_2 + \ldots + \frac{\partial P_s}{\partial x_n} Q_n = \frac{\partial Q_s}{\partial x_1} P_1 + \frac{\partial Q_s}{\partial x_2} P_2 + \ldots + \frac{\partial Q_s}{\partial x_n} P_n. \tag{3}$$

Известно (4), что при этих условиях система (1) допускает единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Если положить

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad P(u, x) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \quad Q(v, x) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix},$$

то систему (1) можно записать в виде

$$dx = P(u, x)\,du + Q(v, x)\,dv. \tag{4}$$

Соответственно условия интегрируемости (3) примут вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} P, \tag{5}$$

где

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \frac{\partial P_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Допустим, что $P(u, 0) = Q(v, 0) = 0$ и введем определение: нулевое решение системы (4) будем называть устойчивым, если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать число δ такое, что для всякого решения $x(u, v)$ системы (4), начальное значение которого $x(u_0, v_0)$, удовлетворяет неравенству $|x(u_0, v_0)| < \delta$, выполняется неравенство $|x(u, v)| < \varepsilon$ для всех $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$.

Устойчивое нулевое решение системы (4) будем называть асимптотически устойчивым, если $x(u, v) \to 0$, когда u и v пробегают любые монотонные расходящиеся последовательности, принадлежащие области H.

Теорема 1. *Если нулевые решения систем*

$$dx = P(u, x)\,du, \tag{6}$$

$$dx = Q(v, x)\,dv, \tag{7}$$

где матрицы P и Q определены в области H и удовлетворяют там условиям интегрируемости (5), *устойчивы, то устойчиво и нулевое решение системы* (4).

Доказательство. Пусть $x(u, v)$ — решение системы (4), отвечающее определенным начальным условиям. При выполнении условия (5) решение $x(u, v)$ будет решением системы (7) при любом фиксированном $u \geqslant u_0$, а потому, в силу устойчивости нулевого решения этой системы, для любого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число δ_1 такое, что при $|x(u, v_0)| < \delta_1$ неравенство $|x(u, v)| < \varepsilon$ будет выполняться для всех $v \geqslant v_0$ при любом фиксированном $u \geqslant u_0$.

Рассмотрим матрицу $x(u, v_0)$. Она является, очевидно, решением системы (6), и поскольку нулевое решение этой системы устойчиво, то по числу δ_1 мы можем указать число δ такое, что при $|x(u_0, v_0)| < \delta$ неравенство $|x(u, v_0)| < \delta_1$ будет выполняться для всех $u \geqslant u_0$, а стало быть, неравенство $|x(u, v)| < \varepsilon$ будет иметь место для всех $u \geqslant u_0$ и $v \geqslant v_0$. Теорема доказана.

Заметим, что когда матрицы $P(u, x)$ и $Q(v, x)$ имеют вид $P(u, x) = p(u)\,x$, $Q(v, x) = q(v)\,x$, где $p(u)$ и $q(v)$ — квадратные матрицы, а x — столбцевая матрица, то условие интегрируемости (5) дает

$$p(u)\,q(v) = q(v)\,p(u), \tag{8}$$

т. е. обращается в условие перестановочности матриц $p(u)$ и $q(v)$. В частности, условие интегрируемости будет иметь вид (8), если $p(u)$ и $q(v)$ — постоянные матрицы. В связи с этим матрицы $P(u, x)$ и $Q(v, x)$, определенные в области H и удовлетворяющие там условию (5), мы будем называть «перестановочными». Кроме того, матрицу $R(t, x)$ будем называть вполне устойчивой (устойчивой), если нулевое решение системы $dx = R(t, x)\,dt$ асимптотически устойчиво (устойчиво).

Следствие. Если $P(u, x)$ и $Q(v, x)$ — устойчивые «перестановочные» матрицы, то будет устойчивой матрица $R(t, x) = \varphi(t)\,P\left(\int_0^t \varphi\,dt,\ x\right) + \psi(t)\,Q\left(\int_0^t \psi\,dt, x\right)$ при любых положительных

непрерывных и ограниченных функциях $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = +\infty$, $\int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt = +\infty$.

В частности, если Ax и Bx (A и B — постоянные матрицы) — устойчивые «перестановочные» матрицы, то матрица $R(x) = (\alpha A + \beta B)x$ будет устойчивой при любых положительных постоянных α и β.

Теорема 2. *Если нулевое решение системы* (6) *устойчиво, а нулевое решение системы* (7) *асимптотически устойчиво, то будет асимптотически устойчиво и нулевое решение системы* (4).

Доказательство. Пусть $x(u, v)$ — решение системы (4), отвечающее начальному условию $x(u_0, v_0)$. Пусть $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) — монотонные расходящиеся последовательности. В силу устойчивости нулевого решения системы (6) для любого, как угодно малого, числа $\varepsilon > 0$ можно указать число δ такое, что при

$$|x(u_0, v)| < \delta \tag{9}$$

неравенство

$$|x(u, v)| < \varepsilon \tag{10}$$

будет выполняться для всех $u \in \{u_k\}$ при любом фиксированном $v \geqslant v_0$. Но так как нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво, то в последовательности $\{v_k\}$ можно указать элемент v_k такой, что неравенство (9) будет выполняться для всех $v \in \{v_k\}$ ($k = n, n+1, \ldots$), а стало быть, неравенство (10) будет иметь место для всех $u \in \{u_k\}$, $v \in \{v_k\}$ ($k = n, n+1, \ldots$). Теорема доказана.

Замечание. При условиях теоремы всякое решение системы (4), для которого $|x(u_0, v_0)| < \delta$, обладает свойством $x(u, v) \to 0$, когда v пробегает монотонную расходящуюся последовательность, а u — произвольную последовательность, принадлежащую области $u \geqslant u_0$.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает:

Теорема 3. *Если нулевые решения систем* (6) *и* (7) *асимптотически устойчивы, то будет асимптотически устойчивым и нулевое решение системы* (4).

Следствие теоремы 2. Если матрица $P(u, x)$ устойчива, матрица $Q(v, x)$ вполне устойчива и эти матрицы «перестановочны», то матрица $R(t, x) = \varphi(t)\,P\left(\int_0^t \varphi\,dt, x\right) + \psi(t)\,Q\left(\int_0^t \psi\,dt, x\right)$ будет вполне устойчивой при любых положительных, непрерывных и ограниченных функциях $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant +\infty$, $\int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt = +\infty$.

В частности, матрица $R(x) = (\alpha A + \beta B)x$ будет вполне устойчивой. Впрочем, этот результат можно получить и другим путем. Действительно при $AB = BA$ матрица $e^{Au+Bv} = e^{Au}\,e^{Bv}$ будет интегральной матрицей системы $dx = Ax\,du + Bx\,dv$. Поэтому, полагая $u = \alpha t$, $v = \beta t$, заключаем ([5]), что собственные значения $\lambda^{(c)}$ матрицы $C = \alpha A + \beta B$ удовлетворяют неравенству $\min \operatorname{Re}(\alpha\lambda^{(a)}) + \min \operatorname{Re}(\beta\lambda^{(b)}) \leqslant \operatorname{Re}(\lambda^{(c)}) \leqslant \max \operatorname{Re}(\alpha\lambda^{(a)}) + \max \operatorname{Re}(\beta\lambda^{(b)})$, где $\lambda^{(a)}$, $\lambda^{(b)}$ — собственные значения матриц A и B. Следовательно, $\operatorname{Re}(\lambda^{(c)}) < 0$, если $\operatorname{Re}(\lambda^{(a)}) \leqslant 0$,

$\mathrm{Re}(\lambda^{(b)}) < 0$, т. е. матрица $R(x)$ является вполне устойчивой. Отсюда:

Теорема 4. *Пусть нулевое решение системы* $dx = Ax\,du + P(u, x)\,du$ *устойчиво по первому приближению. Тогда будет устойчиво по первому приближению и нулевое решение системы*

$$dx = (\alpha A + \beta B)\,x\,dt + (\alpha P(\alpha t, x) + \beta Q(\beta t, x))\,dt \qquad (11)$$

для всякой перестановочной с A матрицы B, собственные значения которой удовлетворяют условию $\mathrm{Re}(\lambda^{(b)}) \leqslant 0$, *и для всякой матрицы* $Q(v, x)$, *принадлежащей к тому же классу, что и матрица* $P(u, x)$*, если только постоянная L в неравенстве*

$$\mathrm{mod}(\alpha P + \beta Q) < L \sum_{s=1}^{n} |x_s| \qquad (12)$$

достаточно мала.

Теорема 5. *Нулевое решение системы* (11) *устойчиво по первому приближению при любых перестановочных матрицах A и B, для которых неравенство* $\max \mathrm{Re}(\alpha \lambda^{(a)}) + \max \mathrm{Re}(\beta \lambda^{(b)}) < 0$ *разрешают положительные числа* α *и* β, *если постоянная L в неравенстве* (12) *достаточно мала.*

Теорема 6. *Нулевое решение системы* (11), *являющейся «линейным объединением» систем* $dx = Ax\,du + P(u, x)\,du$, $dx = Bx\,dv + Q(v, x)\,dv$, *нулевые решения которых устойчивы по первому приближению, будет устойчиво по первому приближению, если матрицы первых приближений объединяемых систем перестановочны, а постоянная L в неравенстве* (12) *достаточно мала.*

Теорема 7. *Нулевое решение системы* $dx = (\alpha X^{(m)}(x) + \beta Y^{(m)}(x))\,dt + (\alpha \Phi(\alpha t, x) + \beta \Psi(\beta t, x))\,dt$, *где* $X^{(m)}(x)$, $Y^{(m)}(x)$ *— вполне устойчивые столбцевые матрицы форм m-го порядка* $(m \geqslant 1)$, *будет асимптотически устойчиво при любом выборе столбцевых матриц* $\Phi(\alpha t, x)$ *и* $\Psi(\beta t, x)$ $(t$ *— параметр), если матрицы* $X^{(m)}(x)$ *и* $Y^{(m)}(x)$ *«перестановочны», а постоянная L в неравенстве* $\mathrm{mod}(\alpha\Phi + \beta\Psi) < L \left(\sum_{s=1}^{n} |x_s|\right)^m$ *достаточно мала.*

Замечание. Теорема сохраняет силу, если одна из матриц $X^{(m)}(x)$, $Y^{(m)}(x)$ является только устойчивой (теорема 2, следствие).

По поводу теорем (4)—(7) см. [6].

Полученные результаты без труда переносятся на случай, когда система (4) зависит от k параметров.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
13 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, Матем. сборн., 23 (65), 161 (1948). [2] Е. А. Барбашин, ДАН, 55, № 4, 283 (1947). [3] Е. А. Барбашин, Матем. сборн., 27 (69): 3, 455 (1950). [4] T. Y. Thomas, Ann. of Math., 35, No. 4, 729 (1934). [5] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1953. [6] И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, М.—Л., 1952.

* Т. е. $\mathrm{mod}(P, Q) < M \sum_{s=1}^{n} |x_s|$, где M — постоянная [6].