Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. М. ГЛУСКИН

ГОМОМОРФИЗМЫ ОДНОСТОРОННЕ ПРОСТЫХ ПОЛУГРУПП НА ГРУППЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 II 1955)

Полугруппа G называется простой справа, если она не содержит отличных от G правых идеалов*. Для любых двух элементов a, b такой полугруппы G в ней разрешимо уравнение $ax = b$.

Наиболее важным классом этих полугрупп (не считая групп) являются, повидимому, полугруппы взаимно-однозначных отображений бесконечного множества M на свои бесконечные подмножества A такие, что $M - A$ бесконечно ([1–3]). Для таких полугрупп справедлив также левый закон однозначной обратимости: из $xa = ya$ следует $x = y$. Однако в литературе указываются и другие односторонне простые полугруппы ([2–5]).

Тесье ([4]) рассмотрела вопрос о гомоморфизмах односторонне простых полугрупп на полугруппы с идемпотентами. Она нашла необходимое и достаточное условие, при котором подполугруппа E односторонне простой полугруппы G является полным прообразом идемпотентного элемента полугруппы φG.

В настоящей заметке дана конструкция общего наибольшего делителя $\bar{\varphi}$ ([6]) всех гомоморфизмов односторонне простой полугруппы G на группы**.

Для каждого элемента a простой справа полугруппы G из разрешимости в G уравнения $ax = a$ следует существование в G правой единицы i_a:

$$ai_a = a.$$

Обозначим через T подполугруппу G, порожденную всеми правыми единицами i_a всех элементов G, т. е. множество всех элементов t полугруппы G вида

$$t = i_1 i_2 \dots i_k,$$

где i_s — правые единицы некоторых элементов из G.

Обозначим, далее, через N множество всех элементов $n \in G$, удовлетворяющих при $t, t' \in T$ уравнениям типа $tn = t'$ (напомним, что каждое такое уравнение разрешимо в G). Из $t't \in T$ для любых элементов $t, t' \in T$ следует, что $T \subset N$.

Оказывается, множество N играет существенную роль в характеристике гомоморфизмов полугруппы G, а именно, оно является ядром ранее упомянутого гомоморфизма $\bar{\varphi}$.

Лемма 1 ([2]). *Пусть a, b, c — любые три элемента из G. Если $ab = ac$, то $c = bi$, где i — правая единица некоторого элемента из G.*

* Правый идеал полугруппы G — такое ее подмножество R, что $RG \subset R$.

** Иначе говоря, всякий гомоморфизм φ полугруппы G на группу φG можно представить в виде $\varphi = \psi\bar{\varphi}$, где ψ — некоторый гомоморфизм группы $\bar{\varphi}G$.

Доказательство очевидно. Пусть $ab = ac$ и пусть x — решение уравнения $bx = c$. Тогда $a(bx) = (ab)x = ab$, следовательно, $x = i$ — правая единица элемента ab.

Лемма 2. *Для любого элемента* $a \in G$

$$Ta \subset aT.$$

Доказательство. Пусть a, b — любые элементы из G; i — правая единица элемента b. Из

$$b(ia) = ba$$

и из леммы 1 следует, что $ia = ai'$, где i' — правая единица некоторого элемента из G.

Если теперь $t = i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k$ — любой элемент из T (i_s — правые единицы элементов из G), то существуют такие правые единицы $i_1', i_2', \ldots, i_k'$ некоторых элементов из G, что

$$ta = ai_k' i_{k-1}' \ldots i_2' i_1'.$$

Тем самым лемма доказана. Из этой леммы следует, что для любого элемента $n \in N$ существуют элементы $t_1, t_2 \in T$, удовлетворяющие условию

$$nt_1 = t_2.$$

Лемма 3. *Множество* N *является подполугруппой подгруппы* G.

Доказательство. Пусть n, n' — любые элементы из N, $t_1 \in T$ и

$$t_1 n = t_2, \tag{1}$$
$$t_3 n' = t_4. \tag{2}$$

Умножив (1) справа на n' и используя лемму 2, получим

$$t_1(nn') = n' t_5,$$

где $t_5 \in T$. Умножим теперь последнее равенство слева на t_3. Вследствие (2) имеем

$$(t_3 t_1)(nn') = t_4 t_5.$$

Утверждение леммы следует из определения множества N и замкнутости T.

Лемма 4. *Каковы бы ни были элементы* $t, t' \in G$, *если в* G *разрешимо относительно* z *уравнение*

$$zt = t', \tag{3}$$

то $z \in N$.

Доказательство. Пусть в G существует элемент z, удовлетворяющий уравнению (3). Тогда в G найдется такой элемент n (по определению N, $n \in N$), что

$$tn = i_z,$$

где i_z — одна из правых единиц элемента z. Умножив (3) справа на n, получим

$$z = t'n.$$

Из $T \subset N$ и замкнутости N следует, что $z \in N$.

Лемма 5. *Пусть* n, n' — *любые элементы из* N. *Если в* G *существует такой элемент* z, *что*

$$zn = n', \tag{4}$$

то $z \in N$.

Доказательство. Пусть $z \in G$; $n, n' \in N$ и z удовлетворяет уравнению (4). Пусть, далее, t, t' — такие элементы из T, для которых $nt = t'$. Умножим (4) справа на t:

$$zt' = (zn)t = n't. \tag{5}$$

Из $T \subset N$ и из замкнутости N (лемма 3) следует, что $n't \in N$. Поэтому в T существуют такие элементы t_1, t_2, что

$$(n't)\,t_1 = t_2.$$

Из (5), умножив его справа на t_1, получим:

$$z\,(t'\,t_1) = (n'\,t)\,t_1 = t_2.$$

Чтобы доказать лемму, остается воспользоваться лишь замкнутостью T и леммой 4.

Лемма 6. *Для любого элемента* $a \in G$ $Na \subset aN$.

Доказательство. Пусть a — любой элемент из G; n — любой элемент из N; $t_1 n = t_2$, где $t_i \in T$. В G существует такой элемент x, что

$$na = ax.$$

Отсюда

$$t_2 a = t_1 (na) = t_1 ax.$$

Пусть $t_2 a = at_3$, $t_1 a = at_4$, $t_i \in T$ (см. лемму 2). Тогда

$$at_3 = at_4 x.$$

Из леммы 1 следует, что $t_4 x = t_3 i$, где i — правая единица. Следовательно, $i \in T$, $t_3 i \in T$, $x \in N$.

Теорема 1. *Множество* N *является простой справа полугруппой.*

Иначе говоря, $nN = N$ для любого элемента $n \in N$.

Доказательство. Для любых элементов n, n' из N в G существует элемент x, удовлетворяющий уравнению

$$nx = n'. \tag{6}$$

Из леммы 6 следует существование в N такого элемента n_1, что $xn_1 = n'$. Из леммы 5 теперь получим, что $x \in N$.

Таким образом, в N при любых n, $n' \in N$ разрешимо уравнение (6), а это равносильно утверждению теоремы.

Допустим теперь, что определенная ранее подполугруппа N является правильной частью полугруппы G. Из простоты полугруппы N следует, что для любых a, $b \in G$ подмножества aN и bN полугруппы G либо совпадают, либо не имеют общих элементов ([4]).

Из $i_a \in N$ при любом $a \in G$ и из лемм 5 и 6 следует, что подполугруппа N удовлетворяет условиям, найденным Тесье ([4]). Поэтому комплексы

$$aN,\ bN,\ cN, \ldots$$

относительно действия

$$aN \cdot bN + abN$$

образуют группу с единицей $N = nN$. Обозначим ее через G/N. Отображение

$$\varphi a = aN$$

полугруппы G на группу G/N — гомоморфизм.

Ядро гомоморфизма произвольной полугруппы на полугруппу с единицей называется, как известно, нормальной подсистемой ([6]) этой полугруппы. Мы показали, следовательно, что N — нормальная подсистема полугруппы G.

Пусть теперь M — какая-нибудь другая нормальная подсистема G и φ — тот гомоморфизм полугруппы G, при котором M является полным прообразом единицы полугруппы φG. Рассуждениями, аналогичными приведенным в статье ([4]), легко показать, что φG — группа. Отсюда, в частности, следует, что каждый элемент из φG обладает

только одной правой единицей. Тогда для любой правой единицы i_a произвольного элемента $a \in G$

$$\varphi i_a = \varphi M, \quad i_a \in M.$$

Следовательно, $M \supset T$. Пусть, далее, t и t' — любые элементы из T и $tn = t'$. Из (4) (или из (6)) вытекает, что $n \in M$, т. е. $M \supset N$. Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *N является нормальной подсистемой полугруппы G. Всякая нормальная подсистема M полугруппы G содержит N в качестве подполугруппы.*

Иными словами: гомоморфизм полугруппы G на группу G/N является общим наибольшим делителем всех ее гомоморфизмов на группы.

Наконец, M, содержа N и некоторый элемент $a \in N$, содержит и все подмножество aN (это следует из замкнутости M). Таким образом, M либо целиком содержит данное подмножество aN, либо не имеет с ним общих элементов. Легко видеть, что отображение

$$\psi(aN) = \varphi a$$

группы G/N на группу φG является гомоморфизмом. И хотя, вообще говоря, нормальная подсистема произвольной полугруппы не определяет однозначно ее гомоморфизма, оказалась справедливой следующая теорема:

Теорема 3. *Всякий гомоморфизм φ односторонне простой полугруппы G на полугруппу с единицей однозначно определяется своим ядром. Полугруппа φG является группой, изоморфной фактор-группе группы G/N, определенной в теореме* 2.

В качестве иллюстрации приведем следующий пример (2):

Пусть G — множество всех непрерывных, монотонно возрастающих функций $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, $f(1) < 1$. Относительно суперпозиции функций

$$f * \varphi = \varphi(f(x))$$

это множество является простой справа полугруппой. Правыми единицами элементов этой полугруппы являются такие функции $f(x)$, что $f(x) = x$ в некоторой правой окрестности нуля. Подполугруппы T и N здесь совпадают с множеством всех правых единиц. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ содержатся в одном классе aN, если они совпадают в некоторой правой окрестности нуля. Группа G/N совпадает с фактор-группой группы всех непрерывных монотонно возрастающих функций $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$ ($f(0) = 0$, $f(1) = 1$) по ее нормальному делителю, состоящему из функций, аналогичных функциям из N.

В заключение заметим, что построенная ранее подполугруппа N связана и с гомоморфизмами полугруппы G на произвольную полугруппу φG, содержащую идемпотенты. Дело в том, что такая полугруппа φG является „правой группой“ (2), т. е. теоретико-множественной суммой изоморфных между собой групп H_i, причем $H_i e_k = H_k$, где e_k — единица группы H_k. Такая полугруппа, очевидно, гомоморфна любой из групп H_i. Из теоремы 3 следует, что H_i — фактор-группа группы G/N.

Харьковский государственный
педагогический институт
им. Г. С. Сковороды

Поступило
28 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Baer, F. Levi, Sitzungsber. d. Heidelberg. Ak., Math.-Naturwiss. Kl., 2 Abh., 3 (1932). [2] А. К. Сушкевич, Теория обобщенных групп, Харьков — Киев, 1937. [3] M. Teissier, C. R., **236**, No. 11, 1120 (1953). [4] M. Teissier, C. R., **237**, No. 22, 1375 (1953). [5] Н. Н. Воробьев, ДАН, **83**, № 5, 641 (1951). [6] Е. С. Ляпин, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, № 2, 179 (1950).