Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН

К ТЕОРИИ КОНГРУЕНЦИЙ ОКРУЖНОСТЕЙ В МНОГОМЕРНОМ КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 14 II 1955)

Следуя терминологии Б. А. Розенфельда (1), будем $(n-1)$-параметрическое семейство окружностей в n-мерном конформном пространстве M_n называть конгруенцией окружностей.

Отнесем конгруенцию окружностей в M_n к подвижному конформному реперу, состоящему из двух точек S_0 и S_{n+1} и n проходящих через них единичных гиперсфер $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Будем через $S+\bar{S}$ обозначать гиперсферу, полисферические координаты которой равны сумме соответственных координат гиперсфер S и $\bar{S}$; через aS — гиперсферу, у которой координаты равны соответственным координатам гиперсферы S, умноженным на a; через $S\bar{S}$ — сумму произведений одноименных полисферических координат гиперсфер S и $\bar{S}$. Пусть окружность конгруенции образуется пересечением $n-1$ гиперсфер репера S_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$, а гиперсфера S_n ортогональна окружности $[S_i]$ конгруенции. Точку S_{n+1} нормируем условием $S_0S_{n+1}=1$.

Уравнения инфинитезимального перемещения конформного репера имеют вид

$$dS_\alpha = \omega_\alpha^\beta S_\beta \quad (\alpha,\beta=0,1,2,\ldots,n+1). \tag{1}$$

Точка $P(p)$ окружности $[S_i]$ во введенном репере имеет вид:

$$P = S_0 + pS_n - \frac{p^2}{2}S_{n+1}. \tag{2}$$

Точки пересечения окружности $[S_i]$ с бесконечно близкими окружностями $[S_i+dS_i]$ конгруенции назовем фокусами (2). Криволинейные абсциссы p фокусов на окружности определяются из системы уравнений:

$$2\omega_i^{n+1} + 2p\omega_i^n - p^2\omega_i^0 = 0, \quad i=1,2,\ldots,n-1. \tag{3}$$

Двумерную круговую поверхность — однопараметрическое семейство окружностей конгруенции, у которой бесконечно близкие окружности пересекаются, назовем развертывающейся поверхностью конгруенции, а кривую, которую эти окружности огибают, — ребром возврата (3).

Произвольная окружность конгруенции несет $2n-2$ фокусов и через нее проходят $2n-2$ развертывающиеся поверхности. Итак, *конгруенция окружностей имеет* $2n-2$ *фокальных гиперповерхностей и* $2n-2$ *систем развертывающихся поверхностей.*

Гиперсферы S_i возьмем так, чтобы они касались $n-1$ фокальных гиперповерхностей (F_i), описанных фокусами $F_i = S_0 + p_iS_n - \frac{p_i^2}{2}S_{n+1}$, и будем их называть фокальными гиперсферами. В этом полуканоническом репере конгруенция окружностей определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^n = C_i^j\omega_j^0; \quad \omega_i^{n+1} = \frac{p_i^2}{2}\omega_i^0 - p_i\omega_i^n \quad (i,j=1,2,\ldots,n-1). \tag{4}$$

Произвол существования конгруенции окружностей в M_n $2n-2$ функций $n-1$ аргументов.

Если развертывающиеся поверхности конгруенции, имеющие ребра возврата на фокальной гиперповерхности (F_1), будут каналовыми поверхностями, т. е. будут огибать однопараметрическое семейство двумерных сфер, то $C_l^n = 0$ $(l = 2, 3, \ldots, n-1)$. Эти конгруенции с одной системой каналовых поверхностей существуют с произволом n функций $n-1$ аргументов. У них на фокальной гиперповерхности (F_1'), описанной фокусом F_1' $(2C_1^n - p_1)$ ребер возврата будут соответствовать ребрам возврата фокальной гиперповерхности (F_1) — две системы развертывающихся поверхностей, имеющие ребра возврата на этих фокальных гиперповерхностях, сдваиваются в систему каналовых поверхностей $\omega_l^0 = 0$.

Конгруенции, у которых a систем развертывающихся поверхностей, имеющих ребра возврата на фокальных гиперповерхностях (F_g) $F_g = S_0 + p_g S_n - \frac{p_g^2}{2} S_{n+1}$ $(g = 1, 2, \ldots, a)$, будут каналовыми, определяются системой:

$$\omega_g^n = C_g^n \omega_g^0 + C_g^{nh}\omega_h^0; \quad \omega_h^n = C_h^{n\bar{h}}\omega_{\bar{h}}^0; \omega_i^{n+1} = \frac{p_i^2}{2}\omega_i^0 - p_i\omega_i^n; \tag{5}$$

$g = 1, 2, \ldots, a$; $h, \bar{h} = a+1, a+2, \ldots, n-1$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

У конгруенций (5) ребра возврата на a парах фокальных гиперповерхностей (F_g) (p_g) и $(F_g')(2C_g^n - p_g)$ соответствуют, и развертывающиеся поверхности, огибающие эти ребра возврата, сдваиваются в каналовые поверхности.

Наиболее важный класс конгруенций этого типа определяется системой (5) и уравнениями

$$\omega_{\underline{g}}^{\bar{g}} = C_{\underline{g}}^{\bar{g}\,\underline{g}}\omega_{\underline{g}}^0 + C_{\underline{g}}^{\bar{g}\,\underline{g}}\omega_{\underline{g}}^0 + C_{\underline{g}}^{\bar{g}\,h}\omega_h^0; \quad \omega_h^{\underline{g}} = C_h^{\underline{g}\,\underline{g}}\omega_{\underline{g}}^0 + C_h^{\underline{g}\bar{h}}\omega_{\bar{h}}^0; \tag{6}$$

$$\underline{g}, g = 1, 2, \ldots, a; \quad h, \bar{h} = a+1, a+2, \ldots, n-1$$

(по индексам, отмеченным черточкой снизу, суммирования не производится) с произволом $a(a-1)$ функций $n-a+1$ аргументов.

Конгруенции (5), (6) обладают ∞^{n-a-1} a-параметрических фокальных семейств $\omega_h^0 = 0$; при смещении в каждом семействе все бесконечно близкие окружности конгруенции $[S_i + dS_i]$ вместе с окружностью $[S_i]$ лежат на $(a+1)$-мерной сфере $[S_h]$. Каналовые поверхности конгруенции ω_g^0 будут подсемействами этих фокальных семейств.

Если $a = n-2$, то у конгруенции (5) *на $n-2$ парах фокальных гиперповерхностей соответствуют ребра возврата, а оставшаяся пара фокальных гиперповерхностей $(F_{n-1})(p_{n-1})$ и $(F_{n-1}')(2C_{n-1}^n - p_{n-1})$ огибает семейство фокальных гиперсфер S_{n-1}.* При $a = n-2$ конгруенции (5), (6) обладают ∞^1 $(n-2)$-параметрических фокальных семейств $\omega_{n-1}^0 = 0$, при смещении в каждом из которых окружности $[S_i + dS_i]$ лежат на фокальной гиперсфере S_{n-1}.

Конгруенции, у которых все $2n-2$ развертывающиеся поверхности, проходящие через произвольную окружность конгруенции $[S_i]$, попарно сдваиваются в $n-1$ каналовых поверхностей, назовем псевдофокальными конгруенциями. Они определяются системой

$$\omega_i^n = C_i^n\omega_i^0; \quad \omega_i^{n+1} = C_i^{n+1}\omega_i^0; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Каждая пара фокальных гиперповерхностей $(F_i)(p_i)$ и $(F_i')(2C_i^n - p_i)$ псевдофокальных конгруенций огибает семейство фокальных гиперсфер S_i.

Продолжая систему (7), получим ([4])

$$(C_i^n - C_j^n)\,\omega_i^j = A_i^{j\bar{j}}\omega_{\bar{j}}^0, \tag{8}$$

причем

$$A_i^{j\bar{j}}\left(\frac{C_i^{n+1} - C_j^{n+1}}{C_i^n - C_j^n} - \frac{C_i^{n+1} - C_{\bar{j}}^{n+1}}{C_i^n - C_{\bar{j}}^n}\right) = 0; \quad i, j, \bar{j} = 1, 2, \ldots, n-1; \quad i \neq j. \tag{9}$$

Отсюда три возможности:

I. $C_i^{n+1} - C_j^{n+1} = t(C_i^n - C_j^n)$ для всех i и j. У этих конгруенций все окружности первой дифференциальной окрестности ортогональны одной гиперсфере. Следовательно, это конгруенции, открытые Б. А. Розенфельдом ([1]), и мы их будем называть конгруенциями Розенфельда.

Если точки S_0 и S_{n+1} репера поместить в фокусы пары, огибающей фокальные гиперсферы S_1, то конгруенции Розенфельда определяются системой

$$\omega_1^0 = 0; \quad \omega_1^{n+1} = 0; \quad \omega_l^n = C_l^n\omega_l^0; \quad \omega_l^{n+1} = t\omega_l^0; \quad l = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Система (10) непротиворечива в трех случаях:

а) Когда

$$dt - 2t\omega_0^0 = 0, \quad t\omega_n^0 + \omega^n = 0. \tag{11}$$

Конгруенции Розенфельда (10), (11) существуют с произволом $n-1$ функций $n-1$ аргументов. *Эти конгруенции представляют ∞^{n-1} окружностей, ортогональных гиперсфере $S_0 - tS_{n+1}$. На каждой паре фокальных гиперповерхностей конгруенций* (10), (11) *соответствуют линии кривизны, и эти пары фокальных гиперповерхностей находятся в конформном соответствии.*

б) Когда все $C_l^n = u$ для $l = 2, 3, \ldots, n-1$. Произвол существования конгруенций Розенфельда этого типа — одна функция $n-1$ аргументов. *Эти конгруенции расслаиваются на ∞^1 $(n-2)$-параметрических семейств окружностей, проходящих через 2 точки, т. е. у конгруенций этого типа окружность имеет кроме 2 фокусов S_0 и S_{n+1} еще 2 фокуса кратности $n-2$, описывающих на конгруенции линии.*

в) Когда $C_m^n = u$ для $m = 3, 4, \ldots, n-1$. Тогда

$$\omega_1^0 = 0; \quad \omega_1^{n+1} = 0; \quad \omega_2^n = C_2^n\omega_2^0; \quad \omega_m^n = u\omega_m^0; \tag{12}$$

$$\omega_l^{n+1} = t\omega_l^0; \quad dt - 2t\omega_0^0 = \alpha\omega_2^0; \quad \omega^n + t\omega_n^0 = \frac{\alpha}{u}\,\omega_2^0.$$

Эти конгруенции существуют с произволом 2 функций $n-1$ аргументов. *Эти конгруенции представляют ∞^2 $(n-3)$-параметрических семейств окружностей, проходящих через 2 точки.* Окружность конгруенции (12) несет 4 простых фокуса и 2 фокуса кратности $n-3$, описывающих двумерные поверхности.

II. $C_1^{n+1} - C_g^{n+1} = t(C_1^n - C_g^n)$ для $g = 2, 3, \ldots, a$ и $A_i^{j\bar{j}} = 0$, когда хотя бы один из индексов $i, j, \bar{j}$ $(i \neq j \neq \bar{j})$ больше a. Конгруенции этого типа существуют с произволом 1 функции a аргументов. Эти конгруенции $n-a$ способами разложимы на ∞^1 $(n-2)$-параметрических фокальных семейств. $a-1$ пар фокальных гиперповерхностей у этих конгруенций стягиваются в две $(n-a)$-мерные поверхности.

III. Все $A_i^{j\bar{j}} = 0$ для $i, j, \bar{j} = 1, 2, \ldots, n-1$; $i \neq j \neq \bar{j}$. Эти конгруенции, существующие с произволом $(n-1)(n-2)$ функций 2 аргументов, назовем конгруенциями K. Они определяются уравнениями (7) и уравнениями

$$\omega_i^j = a_i^j\omega_i^0 + b_i^j\omega_{\bar{j}}^0; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n-1 \quad (i \neq j). \tag{13}$$

Конгруенции K обладают $n-1$ системами *$(n-2)$-параметрических фокальных семейств* $\omega_i^0 = 0$. Каналовые поверхности конгруенции K образуются пересечением $n-2$ этих фокальных семейств.

Псевдофокальные конгруенции, у которых все фокальные гиперсферы S_i взаимно ортогональны, — нормальные конгруенции окружностей (циклические системы Рибокура) ([5]) — они обладают ∞^1 ортогональных гиперповерхностей. Обратно, *нормальные конгруенции окружностей — псевдофокальные конгруенции с взаимно ортогональными фокальными гиперсферами.*

Розенфельдом было доказано, что если конгруенция Розенфельда имеет одну ортогональную гиперповерхность, не являющуюся гиперсферой, то конгруенция нормальная ([1]).

Для конгруенций K эта теорема вообще не имеет места: *если конгруенция K имеет одну ортогональную гиперповерхность, то либо конгруенция нормальна, либо ортогональная гиперповерхность является огибающей a-параметрического $(a \leqslant n-3)$ семейства гиперсфер.*

Если конгруенция K имеет 2 ортогональные гиперповерхности, то она нормальная.

Нормальные конгруенции K, у которых одно семейство ребер возврата будет линиями кривизны соответствующей фокальной гиперповерхности, назовем конгруенциями B. Если точки S_0 и S_{n+1} поместить в фокусы пары, огибающей фокальные гиперсферы S_1 и ребра возврата $\omega_l^0 = 0$ гиперповерхности S_0 будут линиями кривизны, то конгруенции B определяются уравнениями:

$$\omega_1^0 = 0; \quad \omega_1^{n+1} = 0; \quad \omega_l^n = C_l^n \omega_l^0; \quad \omega_l^{n+1} = C_l^{n+1} \omega_l^0; \tag{14}$$
$$\omega_1^l = -\omega^1 = b_1^l \omega_l^0; \quad \omega_i^{\bar{l}} = -\omega_{\bar{i}}^l = a_i^{\bar{l}} \omega_i^0 + b_i^{\bar{l}} \omega_{\bar{i}}^0$$

с произволом $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ функций двух аргументов.

На паре фокальных гиперповерхностей (S_0) и (S_{n+1}) конгруенций B (7), (14) *все линии кривизны соответствуют и высекаются каналовыми поверхностями конгруенции. Линии кривизны $\omega_l^0 = 0$ этих гиперповерхностей лежат на двумерных сферах $[S_l]$. Все остальные фокальные гиперповерхности будут иметь одним семейством линий кривизны окружности $\omega_l^0 = 0$.*

Если фокусы S_0 и S_{n+1} гармонически делят фокусы остальных фокальных пар, то $C_l^n = 0$ $(l = 2, \ldots, n-1)$. Существуют 2 класса конгруенций B, у которых фокусы одной пары гармонически делят фокусы всех других пар: а) когда все $C_l^{n+1} = C$; у этого класса, существующего с произволом 2 функций одного аргумента, фокальные гиперповерхности (S_0) и (S_{n+1}) будут огибающими однопараметрического семейства гиперсфер, а все остальные фокальные гиперповерхности стягиваются в две линии; б) когда $\omega_0^0 = 0$ и $\omega^n / \omega_1^n = \text{const}$.

Линии кривизны $\omega_l^0 = 0$ фокальной пары (S_0) и (S_{n+1}) будут окружностями, а $(n-2)$-мерные поверхности $\omega_1^n = 0$ этих гиперповерхностей лежат на гиперсфере S_n. При $n = 3$ в обоих случаях фокальные поверхности (S_0) и (S_{n+1}) будут изотермическими поверхностями.

Институт инженеров железнодорожного транспорта
им. И. В. Сталина

Поступило
17 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Розенфельд, Матем. сборн., **23** (65): 2 (1948). [2] С. П. Фиников, Теория поверхностей, М. — Л., 1934. [3] Р. М. Гейдельман, Матем. сборн., **29** (71): 2 (1951). [4] С. П. Фиников, Метод внешних форм, М. — Л., 1948. [5] A. Ribaucour, C. R., **76** (1873).