Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

М. ГАГУА

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 8 III 1955)

В настоящей заметке указывается общая схема для оценки погрешности при приближенном решении линейных уравнений методом Галеркина ([1–3]).

§ 1. Пусть X и Y — произвольные линейные нормированные пространства, а K — линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y. Пусть X_n, Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — некоторые полные подпространства пространств X, Y, соответственно, а K_n — линейный ограниченный оператор, отображающий X_n в Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Введем обозначения

$$E_n(x) = \inf_{x_n \in X_n} \| x - x_n \|, \quad E_n(y) = \inf_{y_n \in Y_n} \| y - y_n \| \quad (x \in X, y \in Y),$$

$$\varepsilon_n(x) = \| Kx - K_n x \| \quad (x \in X_n, \ n = 1, 2, \ldots)$$

и предположим, что выполнены условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} E_n(y) = 0$;

б) $E_n(x) \leqslant t_n \| x \|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для x-в, удовлетворяющих уравнению $Kx = y \in Y_n$;

в) $\varepsilon_n(x) \leqslant \varepsilon_n \| x \|$ $(x \in X_n, \ n = 1, 2, \ldots)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Далее, пусть для любых $x \in X$ и $y \in Y$ существуют элементы $x_n \in X_n$, $y_n \in Y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определенные равенствами

$$E_n(x) = \| x - x_n \|, \quad E_n(y) = \| y - y_n \|.$$

Эти x_n и y_n назовем, соответственно, наилучшими приближениями n-го порядка элементов x, y.

Рассмотрим уравнение

$$Kx = y \quad (x \in X, \ y \in Y). \tag{1}$$

Уравнения:

$$K_n x = y_n \quad (x \in X_n, \ n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где y_n — наилучшее приближение элемента y, будем называть n-ми приближенными уравнениями, а их решения, которые обозначим через $\bar{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — n-ми приближенными решениями.

Легко проверить, что если операторы K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ обратимы, то

$$\| x - \bar{x}_n \| \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \| K_n^{-1} \| \varepsilon_n + \| K_n^{-1} \| \| K \|) E_n(x) + \| K_n^{-1} \| (\| x \| \varepsilon_n + E_n(y)), \tag{3}$$

где x — решение уравнения (1) для данного y, а $\bar{x}_n$ — соответствующие приближенные решения.

Следуя ([1]), скажем, что некоторый оператор L обладает свойством A, если для него из существования правого (левого) обратного следует существование обратного.

Теорема 1. *Пусть оператор K обратим, а K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ обладает свойством A; тогда для n, удовлетворяющего неравенству*

$$q_n = \{\varepsilon_n (t_n + 1) + \| K \| t_n\} \| K^{-1} \| < 1, \tag{4}$$

соответствующий K_n также обратим, причем

$$\| K_n^{-1} \| \leqslant (1 + t_n)(1 + q_n)^{-1} \| K^{-1} \|, \tag{5}$$

$$\| x - \bar{x}_n \| = O\{E_n(x) + E_n(y) + \varepsilon_n\} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где x — решение (1) для данного y, а $\bar{x}_n$ — решение (2).

Действительно, рассмотрим уравнение

$$K_n x = y \quad (x \in X_n,\ y \in Y_n,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $x^* = K^{-1} y$, а $x_1 = x_n^*$. Тогда, как легко проверить, справедливы неравенства

$$\| K_n x_1 - y \| \leqslant \{\varepsilon_n (t_n + 1) + \| K \| t_n\} \| K^{-1} \| \| y \|,$$

$$\| x_1 \| \leqslant (t_n + 1) \| K^{-1} \| \| y \|$$

для любого $y \in Y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, учитывая (3), методом «исчерпывания» ([1]) непосредственно получается справедливость сформулированного предложения.

Также легко доказывается и обратное предложение.

§ 2. Рассмотрим теперь случай, когда в пространстве X имеется полная система элементов x_i $(i = 1, 2, \ldots)$, а Y является некоторым линейным подмножеством пространства Гильберта.

Пусть X_n — множество элементов вида

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{7}$$

Y_n — множество элементов вида

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i K x_i \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

а

$$K_n x \equiv K x \quad (x \in X_n, \quad n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где a_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные действительные постоянные.

Очевидно:

$$t_n = \varepsilon_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

а

$$E_n(y) \leqslant \| K \| E_n(x) \quad (y = Kx,\ x \in X,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Пусть, далее, элементы $\psi_i \in Y$ $(i = 1, 2, \ldots)$ образуют некоторую полную ортонормированную систему в Y с условием

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (Kx_1, \psi_1) \ldots (Kx_n, \psi_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (Kx_1, \psi_n) \ldots (Kx_n, \psi_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где $(\ ,\ )$ — символ скалярного произведения.

Теорема 2. *Если x для данного y является решением уравнения* (1) *и имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n(y)}{|\Delta_n|}\left[\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \| \psi_i \|^2\right]^{1/2} = 0, \tag{13}$$

то

$$\| x - \bar{x}_n^* \| = O\left\{E_n(x) + \frac{E_n(y)}{|\Delta_n|}\left[\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \| \psi_i \|^2\right]^{1/2}\right\}, \tag{14}$$

где

$$\bar{x}_n^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* x_i \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

причем c_i^* однозначно определяются из системы

$$\sum_{i=1}^{n} (Kx_i, \psi_j)\, c_i^* = (y, \psi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Действительно, на основании теоремы 1, учитывая (10) и (11), имеем:

$$\| x - \bar{x}_n \| = O\{E_n(x)\}, \tag{17}$$

где

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

а c_i однозначно определяются из системы

$$\sum_{i=1}^{n} (Kx_i, \psi_j)\, c_i = (y_n, \psi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Сравнивая (16) и (9), на основании неравенства М. М. Лаврентьева ([4]), получаем *

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (c_i - c_i^*)^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{|\Delta_n|}\left[\sum_{i=1}^{n} (y - y_{\ \ \psi})^2\right]^{1/2},$$

т. е.

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (c_i - c_i^*)^2\right]^{1/2} = O\left\{\frac{E_n(y)}{|\Delta_n|}\left[\sum_{i=1}^{n} \| \psi_i \|^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{20}$$

Исходя из (15) и (18), учитывая (20), имеем:

$$\| \bar{x}_n - \bar{x}_n^* \| = O\left\{\frac{E_n(y)}{|\Delta_n|}\left[\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \| \psi_i \|^2\right]^{1/}\right\}. \tag{21}$$

* Не ограничивая общности, предположим, что $\| Kx_i \| \leqslant 1$ $(i = 1, 2 \ldots)$.

Это последнее равенство вместе с (17) полностью доказывает теорему, так как

$$\| x - \bar{x}_n^* \| \leqslant \| x - \bar{x}_n \| + \| \bar{x}_n - \bar{x}_n^* \|.$$

В частности, пусть $\psi_i = Kx_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и пусть x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ таковы, что система $\psi_i = Kx_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ образует ортонормированную систему в Y; тогда, очевидно, $\bar{x}_n = \bar{x}_n^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, для этого случая

$$\| x - \bar{x}_n^* \| = O\{E_n(x)\}.$$

§ 3. Доказанные выше предложения применимы и для того случая, когда уравнение (1) рассматривается в векторном пространстве. В самом деле, пусть X_i и Y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — произвольные нормированные пространства. Обозначим через X множество $\{x\}$, где

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \quad (x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \ldots, k), \tag{22}$$

а через Y — множество $\{y\}$, где

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \quad (y_i \in Y_i,\ i = 1, 2, \ldots, k). \tag{23}$$

Определим в этих множествах операции сложения и умножения на скаляр как обычно и для определенности примем, что

$$\| x \| = \left[\sum_{i=1}^{k} \| x_i \|^2 \right]^{1/2}, \quad \| y \| = \left[\sum_{i=1}^{} \| \quad \|^2 \right]^{1/2} \quad (x \in X,\ y \in Y). \tag{24}$$

Пусть

$$K = (K_1, K_2, \ldots, K_k), \tag{25}$$

где K_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — линейные ограниченные операторы, отображающие, соответственно, X_i в Y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Легко заметить, что K — также ограниченный оператор, отображающий X в Y, причем

$$\| K \| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{k} \| K_i \|^2 \right]^{1/2}. \tag{26}$$

Пусть

$$X_i^n, \quad Y^n, \quad K_i^n \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

последовательности, которые при каждом фиксированном i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ относительно n удовлетворяют условиям § 1. Очевидно, этим же условиям относительно X, Y и K будут удовлетворять и последовательности

$$\begin{gathered} X_n = (X_1^n, X_2^n, \ldots, X_k^n), \quad Y_n = (Y_1^n, Y_2^n, \ldots, Y_k^n), \\ K_n = (K_1^n, K_2^n, \ldots, K_k^n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{28}$$

откуда непосредственно следует справедливость теоремы 1 для уравнения, определенного оператором (25).

Если теперь предположить, что X_i и Y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ дополнительно удовлетворяют условиям § 2, то, определяя скалярное произведение в пространстве Y как сумму скалярных произведений соответствующих компонент его элементов, совершенно аналогично получим и теорему 2 для этого последнего случая.

Тбилисский математический институт
им. А. Н. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
21 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, **3**, в. 6 (1948). [2] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, М.—Л., 1950. [3] И. К. Даугавет, ДАН, **98**, № 6 (1954). [4] М. М. Лаврентьев, Матем. сборн., **34** (76), в. 2, 259 (1954).