Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. В. БОЯРСКИЙ

ГОМЕОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ БЕЛЬТРАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 III 1955)

1. Системой Бельтрами называется эллиптическая система уравнений первого порядка вида

$$-v_y = \gamma u_x + \alpha u_y, \quad v_x = \alpha u_x + \beta u_y, \tag{1}$$

где α, β, γ — некоторые функции точки (x, y), удовлетворяющие условиям $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$, $\beta > 0$.

Вводя обозначения $w = u - iv$, $w_{\bar{z}} = {}^1/_2 (w_x + iw_y)$, $w_z = {}^1/_2 (w_x - iw_y)$, $z = x + iy$, систему (1) удобно переписать в виде

$$w_{\bar{z}} - q(z)\, w_z = 0, \quad q(z) = \frac{-\alpha + i(1-\beta)}{-\alpha + i(1+\beta)}. \tag{2}$$

Предположение, что α, β, γ — ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие условию $\beta \geqslant \beta_0 > 0$, β_0 — постоянная, эквивалентно тому, что $q(z)$ измерима и существует верхняя грань $\max \operatorname{vrai} |q(z)| = q_0 < 1$. В дальнейшем будем рассматривать системы (1), записанные в виде (2), где $q(z)$ — некоторая измеримая функция, ограниченная постоянной $q_0 < 1$ и исчезающая вне некоторого круга K (последнее не является существенным).

В работе (1) И. Н. Векуа построил некоторое частное решение уравнения (2) и доказал, что в случае, когда $q(z)$ исчезает вне некоторого конечного круга и удовлетворяет условию Гельдера на всей плоскости, построенное решение осуществляет гомеоморфное отображение плоскости z на плоскость w. Настоящая работа является продолжением и дополнением названной работы И. Н. Векуа. Именно, мы доказываем, что построенное И. Н. Векуа решение уравнения (2) осуществляет гомеоморфное отображение плоскости z на плоскость w также в том случае, когда $q(z)$ — просто измеримая функция. Одновременно изучаем некоторые другие свойства построенных решений.

В (1) введено в рассмотрение следующее решение (2): $w(z) = z - \frac{1}{\pi} \iint\limits_K \frac{\omega(t)}{t-z}\, dT_t \equiv z + T\omega$, где ω — решение функционального уравнения $\omega(z) - q(z)\, S\omega = q(z)$; здесь $S\omega$ — сингулярный оператор вида $S\omega = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_K \frac{\omega(t)}{(t-z)^2}\, dT_t$. Оператор $S\omega$ определен и ограничен в L_2 и $\| S\omega \|_{L_2} \leqslant \| \omega \|_{L_2}$. По теореме Кальдерона — Зигмунда (2) $S\omega$ определен и ограничен в любом пространстве L_p, $p > 1$, $\| S\omega \|_{L_p} \leqslant A_p \| \omega \|_{L_p}$. Итак, $A_2 = 1$. Отсюда и из теорем выпуклости Рисса (3) следует, что $A_p \cdot q_0 < 1$ для p из некоторого интервала $|p - 2| < \varepsilon(q_0)$, $\varepsilon > 0$. Фиксируем одно такое $p > 2$ и соответствующее пространство L_p и все дальнейшие рассуждения будем вести, если не оговорено

противное, в этом фиксированном пространстве L_p. Для простоты считаем, что все рассматриваемые функции определены на всей плоскости, хотя в дальнейшем операции $T\omega$ и $S\omega$ применяются лишь к функциям, исчезающим вне некоторого фиксированного круга K.

В [1] доказано, что если $q(z)$ непрерывна по Гельдеру на всей плоскости ($q \equiv 0$ вне K), то $w(z)$ осуществляет гомеоморфизм плоскости z на плоскость w. Там же доказано, что в этих предположениях $w(z)$ непрерывно дифференцируема на всей плоскости. Эти факты являются основными для наших рассуждений.

2. Пусть $q_n(z)$ — последовательность дифференцируемых функций, сходящаяся к $q(z)$ почти всюду и такая, что $|q_n| \leqslant q_0 < 1$ и $q_n \equiv 0$ вне K. Очевидно, будем иметь $\| q_n - q \|_{L_p} \to 0$ при любом $p > 0$.

Рассмотрим последовательность функций $w_n(z) = z + T(\omega_n)$, где ω_n — решение интегрального уравнения

$$\omega_n - q_n S\omega_n = q_n. \tag{3}$$

$\omega_n \equiv 0$ вне K. Из (3) получаем оценку $\| \omega_n \|_{L_p} \leqslant q_0 A_p \| \omega_n \|_{L_p} + \| q_n \|_{L_p}$, откуда

$$\| \omega_n \|_{L_p} \leqslant \frac{\| q_n \|_{L_p}}{1 - q_0 A_p} < \frac{C}{1 - q_0 A_p}, \tag{4}$$

где C — постоянная, не зависящая от n (и от p).

Из (3) получаем $\omega_n - \omega_m = q_n S(\omega_n - \omega_m) + (q_n - q_m) S\omega_m + q_n - q_m$, откуда $(1 - q_0 A_p) \| \omega_n - \omega_m \|_{L_p} \leqslant \| q_n - q_m \|_{L_p} + \| (q_n - q_m) S\omega_n \|_{L_p}$. Но $\| (q_n - q_m) S\omega_m \|_{L_p} \leqslant \| q_n - q_m \|_{L_{p \cdot q'}} \cdot \| S\omega_m \|_{L_{pp'}}$, где $\frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = 1$. Подбирая p' достаточно близким к единице и учитывая характер оценки (4), убеждаемся, что

$$\| \omega_n - \omega_m \|_{L_p} \leqslant \varepsilon_{n,m} C_1, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{n,m} \to 0 \text{ при } n, m \to \infty; \tag{5}$$

C_1 — постоянная, т. е. ω_n сходятся в среднем в L_p. Пусть $\lim \omega_n = \omega$, $n \to \infty$. Обозначая $w(z) = z + T\omega$, из (5) заключаем, что $w_n(z) \to w(z)$ равномерно на всей плоскости. Очевидно, $w(z)$ есть некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию Гельдера. Она обладает обобщенными производными $w_{\bar{z}} = \omega$ и $w_z = 1 + S\omega$, принадлежащими L_p. Очевидно также, что w удовлетворяет уравнению (2) (в обобщенном смысле).

Докажем, что $w(z)$ есть гомеоморфизм плоскости z на плоскость w. Для этой цели рассмотрим множество функций $z = z_n(w)$, обратных к функциям последовательности $w = w_n(z)$. Это непрерывно дифференцируемые функции. Легко проверить формулы

$$\frac{\partial z_n}{\partial w} = \frac{1}{J_n} \frac{\partial w_n}{\partial z}, \quad \frac{\partial z_n}{\partial \bar{w}} = -\frac{1}{J_n} \frac{\partial w_n}{\partial \bar{z}}, \tag{6}$$

где J_n — якобиан преобразования $w = w_n(z)$; $J_n = \left| \frac{\partial w_n}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial w_n}{\partial \bar{z}} \right|^2$.

Из (4) и формулы $w_n = z + T\omega_n$ выводим, что $|w_n(z) - z| < M$, где M — постоянная, не зависящая от z и n. Отсюда следует, что $\partial z_n / \partial \bar{w} = 0$ вне некоторого круга K_1, не зависящего от n. Поэтому [4] $z_n(w)$ допускает представление $z_n(w) = w - f_n(w) + T\tilde{\omega}_n$, где $f_n(w)$ —

аналитическая на всей плоскости функция. Так как $\lim_{z\to\infty} |w_n(z) - z| = 0$ и $|w_n(z) - z| < M$, то $f_n(w) \equiv 0$. Окончательно имеем представление

$$z_n(w) = w + T\tilde{\omega}_n. \tag{7}$$

Из формулы (6) видно, что $z_n(w)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z_n}{\partial \bar{w}} + q_n(z_n(w))\frac{\partial \bar{z}_n}{\partial \bar{w}} = 0$. Подставляя (7) в это уравнение, убеждаемся, что $\tilde{\omega}_n$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\tilde{\omega}_n(t) + \tilde{q}_n(w)\overline{S\tilde{\omega}_n} = -\tilde{q}_n, \tag{8}$$

где $\tilde{q}_n(w) = q_n(z_n(w))$. Аналогично (4) получаем отсюда, что $\|\tilde{\omega}_n\|_{L_p}$ равномерно ограничены. Так как T — вполне непрерывный оператор, то можно подобрать подпоследовательность $z_{n_k}(w)$, равномерно сходящуюся к некоторой функции $z(w)$. Очевидно, $z(w)$ удовлетворяет условию Гельдера. Из соотношений $w_{n_k}(z_{n_k}(w)) \equiv w$ и $z_{n_k}(w_{n_k}(z)) \equiv z$ получаем предельным переходом при $k \to \infty$, что $w(z(w)) \equiv w$ и $z(w(z)) \equiv z$, т. е. что $w = w(z)$ есть гомеоморфизм плоскости z на плоскость w.

3. Мы уже видели, что построенный гомеоморфизм $w = w(z)$ обладает обобщенными производными, суммируемыми с некоторой степенью $p > 2$ в каждой ограниченной области плоскости z. Поэтому имеет вполне определенный смысл якобиан преобразования $w = w(z)$ $J_w = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}^2|$. Оказывается, однако, что $w(z)$ обладает рядом других теоретико-функциональных свойств, аналогичных свойствам непрерывно дифференцируемых преобразований. Именно, имеет место теорема:

Для любого измеримого множества E плоскости z его образ $w(E)$ измерим и $\mathrm{m}\, w(E) = \int_E J_w dT_z$. *Для любой суммируемой на множестве $w(E)$ функции $f(w)$ функция $\varphi(z) = f(w(z))$ суммируема на множестве E и* $\int_{w(E)} f(w)\, dT_w = \int_E \varphi(z) J_w dT_z$. *Если $f(w)$ непрерывна и обладает на некотором открытом множестве O обобщенными производными $f_{\bar{w}}$ и f_w, суммируемыми с квадратом, то $\varphi(z)$ обладает в $w^{-1}(O)$ обобщенными производными, суммируемыми с квадратом, и почти всюду имеют место формулы* $\varphi_z = f_w w_z + f_{\bar{w}}\bar{w}_z$, $\varphi_{\bar{z}} = f_w w_{\bar{z}} + f_{\bar{w}}\bar{w}_{\bar{z}}$. *Преобразование $z = z(w)$ также обладает всеми перечисленными свойствами. В частности,* $J_w \cdot J_z \equiv 1$, *т. е. как J_w, так и J_z отличны от нуля почти всюду.*

Приведем набросок доказательства. Пусть J_n — якобиан преобразования $w = w_n(z)$ и E — некоторое измеримое множество. Из равенства $\mathrm{m}\, w_n(E) = \int_E J_n dT_z$ и из (4), применяя неравенство Гельдера, получаем оценку $\mathrm{m}\, w_n(E) \leqslant C(\mathrm{m}\, E)^{1/q}$, где q — некоторая достаточно большая постоянная, а C не зависит ни от n, ни от E (если $\mathrm{m}\, E$ ограничена). Пусть E — некоторый прямоугольник. Нетрудно проверить формулу $\lim \mathrm{m}\, w_n(E) = \mathrm{m}\, w(E)$ при $n \to \infty$. Полученная равномерная оценка для $\mathrm{m}\, w_n(E)$ утверждает, что множество интегралов $\int_e J_n dT_z$, $e \subset E$, равностепенно абсолютно непрерывно ([5]). Поэтому, переходя в равенстве $\mathrm{m}\, w_n(E) = \int_E J_n dT_z$ к пределу при $n \to \infty$, полу-

чаем $\mathrm{m}\,w(E)=\int\limits_E J_w dT_z$. Перенесение этой формулы на случай произвольных измеримых множеств, а также доказательство формулы замены переменных в определенном интеграле не представляют трудности.

Рассматривая множество функции $\varphi_n(z)=f(w_n(z))$ в некотором достаточно малом круге S плоскости z, убеждаемся, что $\varphi_n(z)\to f(w(z))$ и имеет место формула $(\varphi_n)_z=f_w(w_n)_z+f_{\overline{w}}(\overline{w}_n)_z$. Отсюда получаем оценку $\int\limits_S|(\varphi_n(z))_z|^2\,dT_z\leqslant\int\limits_{w_n(S)}\frac{|f_w(w)|^2+q_0^2|f_{\overline{w}}|^2}{1-q_0^2}\,dT_w$, что, очевидно, ограничено независимо от n. На основании известной ([6]) теоремы выводим, что $\varphi(z)$ обладает обобщенной производной φ_z и $\varphi_z=f_w w_z+f_{\overline{w}}\overline{w}_z$. Аналогично рассматривается случай $\varphi_{\overline{z}}$.

Чтобы доказать те же факты для обратного преобразования $z=z(w)$, доказываем сначала, опираясь на полученную равномерную оценку для $\mathrm{m}\,w_n(E)$ и на теоремы Егорова и Лузина об измеримых функциях, что $\tilde{q}_n(w)\to\tilde{q}(w)\equiv\tilde{q}(z(w))$ по мере, т. е. в метрике любого L_p, $p>0$. Отсюда получаем, что $\tilde{\omega}_n$ сходятся в среднем L_p к $\tilde{\omega}(t)$ и оценки, аналогичные (4), для $\|\tilde{\omega}_n\|_{L_p}$. Остальная часть доказательства повторяет все, что сказано про $w(z)$. Формула $J_w\cdot J_z\equiv 1$ получается предельным переходом из соответствующей формулы для $w_n(z)$.

4. Все доказанные свойства функции $w(z)$ переносятся на любые (обобщенные) решения системы (1) или (2). Действительно, на основании приведенных формул дифференцирования убеждаемся, что всякое обобщенное решение $\psi(z)$ системы (2) имеет вид $\psi(z)\equiv\Phi(w(z))$, где $\Phi(w)$ — некоторая аналитическая функция переменной w. В частности, следует, что производные любого решения $\psi(z)$ уравнения (2) суммируемы с некоторой степенью $p>2$ на всякой ограниченной области, целиком содержащейся внутри области, в которой ψ непрерывна.

Кроме основной для нас работы ([1]), системы Бельтрами изучались многими другими авторами; соответствующая библиография приведена в ([1]). При тех же общих предположениях о коэффициентах системы (1), что и у нас, она изучалась в пространной работе Моррей ([7]), в которой получены примерно те же результаты (кроме того, что производные решения $\in L_p$, $p>2$). Однако Моррей в своих доказательствах пользуется другим и значительно более сложным аппаратом неравенств и теорем о компактности.

Отметим в конце, что результаты настоящей работы позволяют значительно обобщить все применения к другим вопросам, которые рассмотрены в ([1]).

В заключение хочу выразить сердечную благодарность чл.-корр. АН СССР И. Н. Векуа за постановку задачи и многие ценные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, **100**, № 2, 197 (1955). [2] A. Calderon, A. Zygmund, Acta Math., **88**, 85 (1952). [3] M. Riesz, Acta Math., **49**, 465 (1926). [4] И. Н. Векуа, ДАН, **89**, № 5, 773 (1953). [5] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, 1950, стр. 136. [6] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа..., Л., 1950. [7] Ch. B. Morrey, Trans. Am. Math. Soc., **43**, 126 (1938).