Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

*ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

А. Л. МИКАЭЛЯН

# ВОЛНОВОДНЫЕ И КОАКСИАЛЬНЫЕ ВЕНТИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ВОЛН, ОБЛАДАЮЩИХ СИММЕТРИЕЙ ВРАЩЕНИЯ

*(Представлено академиком В. А. Котельниковым 5 IV 1955)*

## Введение

Среди волн, обладающих симметрией вращения, наибольший интерес для практики, как известно, представляют волны типа $H_{01}$ и $E_{01}$ в круглом волноводе и $TEM$ в коаксиальном кабеле. В связи с этим и возникает задача создания для этих волн вентильных систем, т. е. систем, ведущих себя по-разному для волн, проходящих через них в противоположных направлениях. Эта задача, как будет показано ниже, может быть решена применением ферритов и электронной плазмы, расположенных соответствующим образом в волноводе или коаксиале. При этом необходимо, чтобы феррит и электронная плазма находились под воздействием постоянного магнитного поля, направленного по координате $\varphi$ цилиндрической системы координат $r$, $\varphi$, $z$. Нетрудно показать, что в присутствии постоянного магнитного поля напряженности $H_\varphi$ в феррите *

$$b_z = \mu_{zz}h_z + \mu_{zr}h_r = \mu h_z - ikh_r,$$
$$b_r = \mu_{rr}h_r + \mu_{rz}h_z = \mu h_r + ikh_z, \quad b_\varphi = \mu_{\varphi\varphi}h_\varphi = \mu_z h_\varphi, \tag{1}$$

где $\mu$ и $k$ зависят от $H_\varphi$, параметров и формы феррита.

Если в электронной плазме, находящейся под воздействием поля $H_\varphi$, распространяется волна $E_{0n}$ с составляющими поля $E_r$, $E_z$, $h_\varphi$, то также можно доказать справедливость следующих соотношений **:

$$D_z = \varepsilon_{zz}E_z + \varepsilon_{zr}E_r = \varepsilon E_z - iqE_r, \quad D_r = \varepsilon_{rr}E_r + \varepsilon_{rz}E_z = \varepsilon E_r + iqE_z. \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon$ и $q$ зависят от $H_\varphi$ и параметров плазмы ([1]). Следует отметить, что $k$ и $q$ в формулах (1) и (2) зависят также от направления поля $H_\varphi$. Вентильные системы, которые будут рассмотрены ниже, представляют собой участок волновода (или коаксиала), содержащего цилиндрический слой феррита или плазмы, как это показано на рис. 1. Поэтому нам необходимо исследовать задачу о распространении указанных выше волн в таком волноводе (или коаксиале). Это в свою очередь требует рассмотрения вопроса о распространении волн в безграничной среде (феррите или плазме) при наличии постоянного магнитного поля $H_\varphi$. С этого вопроса мы и начнем.

---

* Строчными буквами обозначены магнитные величины, зависящие от времени.

** Эти соотношения получаются при условии, что скорость электрона, разогнанного волной $E_{0n}$, имеющей продольную составляющую электрического поля, пренебрежимо мала по сравнению с фазовой скоростью волны, которая в случае волновода больше скорости света (см. по этому поводу примечание в работе ([1])).

## I. Распространение волн в безграничной среде

1. Случай феррита. Подставляя в уравнение Максвелла формы (2), мы видим, что в присутствии поля $H_\varphi$ в феррите могут распространяться вдоль оси $Oz$ две группы плоскоцилиндрических ($\partial/\partial z = -i\gamma_z$) волн, электромагнитное поле которых обладает симметрией вращения ($\partial/\partial\varphi = 0$). В первую группу входят волны $H_{0n}$, имеющие составляющие поля $h_r$, $h_z$, $E_\varphi$, связанные между собой уравнениями

$$-\omega\varepsilon E_\varphi = \gamma_z h_r - ih_z', \quad \gamma_z E_\varphi = -\omega\mu h_r - i\omega k h_z,$$
$$E_\varphi' + \frac{1}{r}E_\varphi = -i\omega\mu h_z - \omega k h_r, \tag{3}$$

где штрихи означают дифференцирование по координате $r$, а $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость феррита.

Волны второй группы (волны $E_{0n}$) имеют составляющие поля $E_r$, $E_z$, $h_\varphi$, связанные уравнениями:

$$i\gamma_z h_\varphi = i\omega\varepsilon E_r, \quad h_\varphi' + \frac{1}{r}h_\varphi = i\omega\varepsilon E_z, \quad -i\omega\mu_z h_\varphi = -i\gamma_z E_r - E_z'. \tag{4}$$

Легко заметить, что в уравнения (4) не входят величины $\mu$ или $k$, зависящие от поля $H_\varphi$. Это означает, что напряженность постоянного магнитного поля $H_\varphi$ не влияет на структуру поля и постоянную распространения волн $E_{0n}$. Такие волны, как известно, называются обыкновенными. Волны $H_{0n}$, определяемые уравнениями (3), являются необыкновенными. Поле $H_\varphi$ влияет на их структуру поля и постоянную распространения, и, следовательно, только в случае волн $H_{0n}$ в феррите будут происходить магнитооптические явления, что необходимо для создания вентильных систем.

Из (3) легко найти уравнения, которым удовлетворяют составляющие поля волны $H_{0n}$. Они имеют вид:

$$h_z'' + \frac{1}{r}h_z' + \left[k_\perp^2 - \gamma_z^2 + \frac{1}{r}\frac{k}{\mu}\gamma_z\right]h_z = 0, \tag{5}$$

$$E_\varphi'' + \frac{1}{r}E_\varphi' + \left[k_\perp^2 - \gamma_z^2 + \frac{1}{r}\frac{k}{\mu}\gamma_z - \frac{1}{r^2}\right]E_\varphi = 0, \tag{6}$$

где $k_\perp^2 = \omega^2\varepsilon\dfrac{\mu^2 - k^2}{\mu}$.

При исчезновении постоянного магнитного поля ($k \to 0$) решения (5) и (6) выражаются цилиндрическими функциями.

Уравнения (5) и (6) сводятся к уравнению Уиттекера ([2]). Для этого надо ввести новую переменную $x = \gamma_r r$, затем положить $E_\varphi = x^{-1/2}y(x)$ и перейти к переменной $\xi = 2ix$. Тогда получим уравнение:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{c}{\xi} + \frac{1/4 - 1}{\xi^2}\right]y = 0, \quad c = -\frac{i}{2}\frac{k}{\mu}\frac{\gamma_z}{\gamma_r}. \tag{7}$$

Решение этого уравнения ([2]) может быть выражено либо через функции $M_{c,1}(\xi)$, либо через функции Уиттекера $W_{\pm c,1}(\pm\xi)$. Таким образом, одно из решений уравнения (6) будет

$$E_\varphi = B\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}}M_{c,1}(2i\gamma_r r). \tag{8}$$

Аналогично можно получить решение уравнения (5):

$$h_z = A\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}}M_{c,0}(2i\gamma_r r). \tag{9}$$

При исчезновении постоянного магнитного поля эти решения переходят в общеизвестные, в чем нетрудно убедиться, используя связь между функцией $M_{0,m}$ и функцией Бесселя $J_m$ ([2]):

$$M_{0,m}(2i\rho) = \Gamma(m+1)\cdot i^{m+1/2}\cdot 2^{2n+1/2}J_m(\rho)\sqrt{\rho}. \tag{10}$$

2. Случай электронной плазмы. Этот случай можно исследовать аналогичным образом. Проще, однако, воспользоваться принципом поляризационной двойственности ([1]). Тогда для волн $E_{0n}$, которые в данном случае являются волнами необыкновенными, получим на основании (3):

$$\omega\mu h_\varphi = \gamma_z E_r - iE'_z, \quad \gamma_z h_\varphi = \omega\varepsilon E_r + i\omega q E_z, \quad h'_\varphi + \frac{1}{r} h_\varphi = i\omega\varepsilon E_z + \omega q E_r. \quad (11)$$

Уравнения для $E_z$ и $h_\varphi$ будут иметь вид:

$$E''_z + \frac{1}{r} E'_z + \left[k_\perp^2 - \gamma_z^2 + \frac{1}{r}\frac{q}{\varepsilon}\gamma_z\right] E_z = 0, \quad (12)$$

$$h''_\varphi + \frac{1}{r} h'_\varphi + \left[k_\perp^2 - \gamma_z^2 + \frac{1}{r}\frac{q}{\varepsilon}\gamma_z - \frac{1}{r^2}\right] h_\varphi = 0, \quad (13)$$

где $k_\perp^2 = \omega^2\mu\frac{\varepsilon^2 - q^2}{\varepsilon}$, $\mu$ — магнитная проницаемость плазмы ($\mu \cong \mu_0$).

Решения этих уравнений также могут быть выражены через функции $M$. Тогда получим:

$$h_\varphi = B\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}} M_{b,1}(2i\gamma_r r), \quad E_z = A\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}} M_{b,0}(2i\gamma_r r), \quad (14)$$

где $b = -\frac{i}{2}\frac{q}{\varepsilon}\frac{\gamma_z}{\gamma_r}$.

## II. Распространение волн в волноводе

На основании изложенного выше можно утверждать, что для создания вентильных систем в случае волн $E_{0n}$ следует использовать плазму, а в случае волн $H_{0n}$ — феррит. Рассмотрим случай волн $E_{0n}$. Пусть в круглом волноводе область $0 \leqslant r \leqslant r_2$ занята электронной плазмой (рис. 1), а область $r_2 \leqslant r \leqslant r_0$ воздухом. Выписывая составляющие поля в двух указанных выше областях и используя условия непрерывности составляющих поля $E_z$ и $h_\varphi$ на границе $r = r_2$, легко получить трансцендентное уравнение для определения постоянной распространения $\gamma_z$ волн типа $E_{0n}$:

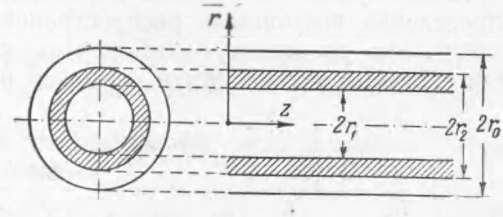


Рис. 1

$$\frac{\gamma_r}{\gamma_{r_0}}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{J'_0(\gamma_{r_0}r_2)N_0(\gamma_{r_0}r_0) - J_0(\gamma_{r_0}r_0)N'_0(\gamma_{r_0}r_2)}{J_0(\gamma_{r_0}r_2)N_0(\gamma_{r_0}r_0) - J_0(\gamma_{r_0}r_0)N_0(\gamma_{r_0}r_2)} =$$

$$= \frac{1}{\gamma_r}\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}} M_{b,0}(2i\gamma_r r)\right]'_{r=r_2}}{\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r_2}} M_{b,0}(2i\gamma_r r_2)} - 2ib. \quad (15)$$

Из (15) следует, что абсолютная величина постоянной распространения $\gamma_z$ (которая входит в $b$) зависит от знака $\gamma_z$, т. е. различна для волн, распространяющихся в противоположных направлениях. На использовании этого явления могут быть, как известно, созданы различные типы вентильных устройств.

Рассматривая аналогичную задачу в случае, когда вдоль оси волновода расположен ферритовый цилиндр, видим, что такая система обладает вентильными свойствами для волн $H_{0n}$. Соответствующее уравнение для определения $\gamma_z$ постоянных распространения волн $H_{0n}$ имеет вид:

$$\frac{\gamma_r}{\gamma_{r_0}}\frac{\mu_0}{\mu}\frac{J_0'(\gamma_{r_0}r_2)\,N_0'(\gamma_{r_0}r_0)-J_0'(\gamma_{r_0}r_0)\,N_0'(\gamma_r r_2)}{J_0(\gamma_{r_0}r_2)\,N_0'(\gamma_{r_0}r_0)-J_0'(\gamma_{r_0}r_0)\,N_0(\gamma_{r_0}r_2)}=$$

$$=\frac{1}{\gamma_r}\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}}M_{c,\,0}(2i\gamma_r r)\right]'_{r=r_2}}{\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r_2}}M_{c,\,0}(2i\gamma_r r_2)}+2ic. \qquad (16)$$

Из этого уравнения следуют те же выводы, что и из уравнения (15).

Заметим в заключение, что, пользуясь аналогичным способом, не представляет труда выписать уравнения для определения постоянных распространения в более общем случае, когда слой плазмы или феррита расположен в области $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

## III. Распространение волн в коаксиальном кабеле

Будем считать, что радиус внутреннего проводника равен $r_1$, а внешнего $r_0$ (рис. 1). Плазмой (или ферритом) занята область $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Для воздушной части коаксиальной линии поля запишутся так же, как и в случае волновода. В области, занятой плазмой (или ферритом), следует воспользоваться функциями Уиттекера. В случае плазмы:

$$E_z = A\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}}\left[W_{b,\,0}(2i\gamma_r r)-\frac{W_{b,\,0}(2i\gamma_r r_1)}{W_{-b,\,0}(-2i\gamma_r r_1)}W_{-b,\,0}(-2i\gamma_r r)\right]. \qquad (17)$$

Используя далее условия на границе $r = r_2$, получим уравнение для определения постоянных распространения волн типа $E_{0,n}$ в коаксиальном кабеле. Это уравнение будет отличаться от уравнения (15) только первым членом в правой части, который в данном случае имеет вид:

$$\frac{1}{\gamma_{r_2}}\frac{\left\{\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r}}\left[W_{b,0}(2i\gamma_r r)-\frac{W_{b,0}(2i\gamma_r r_1)}{W_{-b,0}(-2i\gamma_r r_1)}W_{-b,0}(-2i\gamma_r r_1)\right]\right\}'_{r=r_2}}{\frac{1}{\sqrt{\gamma_r r_2}}\left[W_{b,0}(2i\gamma_r r_2)-\frac{W_{b,0}(2i\gamma_r r_1)}{W_{-b,0}(-2i\gamma_r r_1)}W_{-b,0}(-2i\gamma_r r_2)\right]}. \qquad (18)$$

Первый корень этого уравнения определяет обе постоянные распространения волны квази-$TEM$, которые также различны для волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Совершенно аналогичным способом выводится уравнение для определения постоянных распространения $\gamma_z$ волн $H_{0n}$ в случае, когда в коаксиальной линии расположен феррит. В заключение отметим, что, как указывалось нами ранее ([1]), практически необходимые напряженности постоянного магнитного поля $H_\varphi$ могут быть получены путем пропускания постоянного тока вдоль внутреннего проводника коаксиальной линии. В случае волновода создание такого поля значительно сложнее.

Автор выражает признательность чл.-корр. АН СССР А. А. Пистолькорсу за ряд существенных замечаний.

Институт радиотехники и электроники
Академии наук СССР

Поступило
17 II 1954

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Микаэлян, ДАН, 104, № 1 (1955). [2] Е. Т. Уиттекер, Г. М. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, 1934.