Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Т. БОРИСОВ, Б. Я. ЛЮБОВ и Д. Е. ТЕМКИН

О РАСЧЕТЕ КИНЕТИКИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛИТКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ УСЛОВИЯХ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком Г. В. Курдюмовым 1 III 1955)

Решение задачи о перемещении фронта кристаллизации в затвердевающем слитке представляет значительный практический интерес. Естественно попытаться получить ее решение в форме, допускающей практическое использование для наиболее упрощенной схемы процесса.

Будем считать, что в расплаве отсутствует перегрев, т. е. температура равна температуре плавления T_k, и твердый металл отделяется от жидкого в случае одномерной задачи плоскостью $x = y(t)$. Тогда (см. рис. 1)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{в области } OABO; \tag{1}$$

$$T(y(t),t) = T_k \qquad \text{на } ODB; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = \alpha\,\frac{dy}{dt} \qquad \text{на } ODB; \tag{3}$$

$$y(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь $T(x,t)$ — температура в твердой фазе; $\alpha = Q\rho/\lambda$, где Q — теплота кристаллизации на 1 г; ρ — плотность; λ — коэффициент теплопроводности; a — температуропроводность.

На боковой поверхности слитка $x = 0$ должны быть заданы условия в одной из трех следующих форм:

$$T(0,t) = f_1(t); \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = f_2(t) \tag{6}$$

или

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h\,[T(0,t) - f_3(t)]; \tag{7}$$

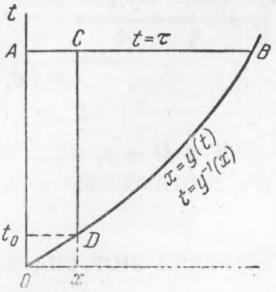


Рис. 1

$h = h_1/\lambda$, где h_1 — коэффициент теплообмена поверхности слитка с окружающей средой.

Решением поставленной задачи является отыскание функций $T(x,t)$ и $y(t)$.

Одним из авторов настоящей статьи (1) было получено для определения $y(t)$ замкнутое уравнение, не содержащее температуры $T(x,t)$, для случая краевого условия вида (5). Однако использованный в (1) метод ока-

зывается мало эффективным в случае краевых условий (6) и (7). Ниже излагается более общий метод решения задач указанного типа, позволяющий при различных краевых условиях найти независимое уравнение для $y(t)$, а также поле температуры внутри слитка.

Введем вспомогательную функцию $V(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial t}=0, \tag{8}$$

сопряженному с уравнением (1). Тогда:

$$\iint\limits_{DCBD}\left\{V(x,t)\left[a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial T}{\partial t}\right]-T(x,t)\left[a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right\}dx\,dt=0. \tag{9}$$

Интегрируя (9) по частям, получим:

$$a\int_{t_0}^{\tau}V(y(t),t)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=y(t)}dt-a\int_{t_0}^{\tau}V(x_0,t)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=x_0}dt-a\int_{t_0}^{\tau}T(y(t),t)\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=y(t)}dt+$$
$$+a\int_{t_0}^{\tau}T(x_0,t)\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=x_0}dt-\int_{x_0}^{y(\tau)}V(x,\tau)T(x,\tau)dx+\int_{x_0}^{y(\tau)}V(x,y^{-1}(x))T(x,y^{-1}(x))dx=0. \tag{10}$$

Для того, чтобы исключить из рассмотрения $T(x,\tau)$ и $\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$, на функцию $V(x,t)$ наложим следующие ограничения

$$V(x,t)\big|_{t=\tau}=0, \tag{11}$$

$$V(x_0,t)=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=\psi(\tau-t). \tag{13}$$

Здесь функция $\psi(\tau-t)$ пока произвольна.

Учитывая условия (2)—(3), а также (11)—(13), из (10) получаем

$$\alpha\int_{t_0}^{\tau}y'(t)\,V(y(t),t)\,dt-\int_{t_0}^{\tau}[T_k-T(x_0,t)]\,\psi(\tau-t)\,dt=0. \tag{14}$$

Функция $V(x,\tau-t)$ однозначно определяется условиями (8) и (11)—(13). Будем искать ее в виде степенного ряда

$$V(x,\tau-t)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\tau-t)\frac{(x-x_0)^k}{k!}, \tag{15}$$

где

$$b_k(\tau-t)=\frac{\partial^k V}{\partial x^k}\Big|_{x=x_0}.$$

Подставляя этот ряд в (8), получаем рекуррентную формулу

$$b_{k+2}(\tau-t)=-\frac{1}{a}\frac{db_k(\tau-t)}{dt}. \tag{16}$$

Из условий (12) и (13) получаем

$$b_0(\tau-t)=0,\quad b_1(\tau-t)=\psi(\tau-t).$$

Следовательно,

$$b_{2k}(\tau - t) = 0, \quad b_{2k+1}(\tau - t) = \frac{(-1)^k}{a^k}\frac{d^k\psi(\tau - t)}{dt^k} = \frac{(-1)^k}{a^k}\psi^{(k)}(\tau - t). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (15), получаем

$$V(x, \tau - t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^k}\psi^{(k)}(\tau - t)\frac{(x - x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (18)$$

Для того, чтобы выражение (18) удовлетворяло уравнению (8) и условию (11), необходимо, чтобы: 1) функция $\psi(\tau - t)$ имела бесконечное число производных, тождественно не равных нулю; 2) функция $\psi(\tau - t)$ обращалась в нуль вместе со своими производными при $t = \tau$.

Подставим (18) в (14):

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^k} \int_{t_0}^{\tau} \psi^{(k)}(\tau - t)\frac{[y(t) - x_0]^{2k+1}}{(2k+1)!} y'(t)\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{\tau} \psi(\tau - t)[T_k - T(x_0, t)]\, dt = 0.$$

Интегрируя первый интеграл k раз по частям и учитывая, что $y(t_0) = x_0$, получаем

$$\int_{t_0}^{\tau} \psi(\tau - t)\left\{\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(y(t) - x_0)^{2k+2}]^{(k+1)}}{a^k(2k+2)!} - [T_k - T(x_0, t)]\right\} dt = 0. \quad (19)$$

Так как функция $\psi(\tau - t)$ произвольна, выражение в фигурных скобках должно тождественно обращаться в нуль и

$$T(x,t) = T_k - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(y(t) - x)^{2k+2}]^{(k+1)}}{a^k(2k+2)!}. \quad (20)$$

Легко проверить, что выражение (20) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), если ряд (20) и его производные T_{xx} и T_t сходятся. Условия сходимости указанных рядов требуют специального рассмотрения.

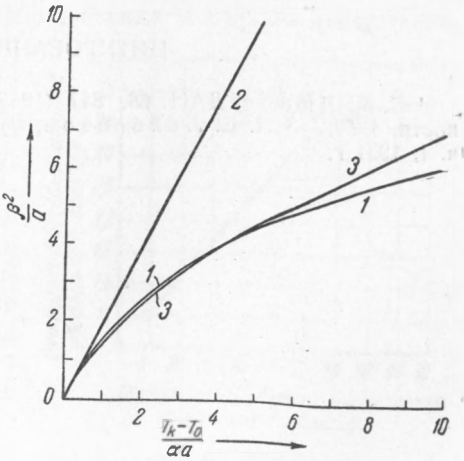


Рис. 2

Формула (20) описывает температурное поле в твердой фазе, если известен закон движения фронта кристаллизации. Если неизвестна функция $y(t)$, то следует использовать краевое условие при $x = 0$ в форме (5), (6) или (7). Соответственно получаем уравнения для определения $y(t)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[y^{2k}(t)]^{(k)}}{a^k(2k)!} = \frac{T_k - f_1(t)}{\alpha a}; \quad (21)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[y^{2k+1}(t)]^{(k+1)}}{a^k(2k+1)!} = \frac{f_2(t)}{\alpha}; \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k}\left[\frac{y^{2k}(t)}{(2k)!} + \frac{1}{h}\frac{y^{2k-1}(t)}{(2k-1)!}\right]^{(k)} = \frac{T_k - f_3(t)}{\alpha a}. \quad (23)$$

Выражения (21), (22), (23) дают непосредственную связь закона перемещения фронта кристаллизации с условиями на охлаждаемой поверхности.

Если $f_1 = T_0 = \text{const}$, то из (21) получаем точное решение Стефана [2]

$$y = \beta\sqrt{t}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2/4a}}{\frac{\beta}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a}}\right)} = \frac{\alpha a}{T_k - T_0}. \tag{24}$$

В случае, если в (21) ограничиться первым членом, получим известное приближенное решение Л. С. Лейбензона [3]

$$y^2(t) = \frac{2}{\alpha}\int_0^t [T_k - f_1(t)]\,dt. \tag{25}$$

На рис. 2 линии *1*, *2*, *3* дают зависимость $\frac{\beta^2}{a}$ от $\frac{T_k - T_0}{\alpha a}$, вычисленную, соответственно, по формулам (24), (25) и (21) при удержании членов до $y'^2(t)$ включительно. В последнем случае решение имеет вид

$$y^2(t) = -2at + \int_0^t \sqrt{4a^2 + \frac{8a}{\alpha}[T_k - f_1(t)]}\,dt. \tag{26}$$

Как видно, приближение (26) является более близким к точному решению (24).

Институт металловедения и физики металлов
Центрального научно-исследовательского
института черной металлургии

Поступило
21 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Я. Любов, ДАН, 68, 847 (1949). [2] А. В. Лыков, Теория теплопроводности, 1952. [3] Л. С. Лейбензон, Руководство по нефтепромысловой механике, ч. I, 1931 г.