Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

ГЕОФИЗИКА

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

РАЗВИТИЕ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА МЕЛКОВОДНОМ МОРЕ

Как известно, нарастание высоты ветровых волн на глубоком море ограничено только внутренним турбулентным трением в воде (1), если наветренный берег находится весьма далеко от исследуемой точки моря. Установившееся состояние здесь наступает тогда, когда мощность, передаваемая ветром, оказывается равной мощности, гасимой трением в водных массах.

На мелководном море на сколь угодно большом расстоянии от наветренного берега волны никогда не могут достигнуть этой «физически предельной» высоты: разрушение волн под действием мелководья наступает значительно ранее той стадии волнообразования, когда потери мощности на внутреннее трение становятся сравнимыми с мощностью, передаваемой ветром волне.

Чтобы подчеркнуть серьезное принципиальное различие между поведением волн на глубоком и на мелководном морях, исследуем развитие волн в таких условиях, когда отношение глубины моря к длине волн представляет собой малую величину. Кстати, это дает возможность внести в анализ некоторые законные упрощения, без которых задача оказалась бы чрезвычайно громоздкой и, во всяком случае, не разрешимой до конца в квадратурах.

В частности, важное соотношение (2), определяющее продолжительность жизни волн на мелководье, получит теперь совсем простой вид, если мы примем во внимание, что при стремлении $\alpha = 2\pi H/\lambda$ к нулю величина $\operatorname{sh} 2\alpha/\alpha$ стремится к 2. Значит, при заданных условиях резко выраженного мелководья можно будет записать вместо формулы (19) статьи (2):

$$\tau_{кр} = \frac{2}{\pi}\frac{H}{h}T. \qquad (1)$$

Когда под взаимодействием мелководья обрушивается гребень искаженной волны, то при этом гасится только некоторая доля полной энергии этой волны. Из всех волн, входящих в группу, такому частичному разрушению подвергается либо одна — самая высокая — волна, либо небольшое число волн группы. Никакой сколько-нибудь точный учет этих обстоятельств невозможен. Однако на основании опытов в штормовом бассейне следует полагать, что по истечении промежутка времени $\tau_{кр}$ в среднем гасится энергия, которая составляет небольшую долю σT от полной энергии волн, отнесенной к единице поверхности моря ($^1/_8\,\delta g h^2$). Доля эта нарастает с возрастанием периода волн T по закону, который в первом приближении можно считать линейным.

Отнесем количество гасимой энергии к времени $\tau_{кр}$, в продолжение которого она гасится. Тогда определится мощность, теряемая на разрушение волн под действием мелководья. На основании цитированного выражения энергии волн и на основании (1) запишется

$$W_H = \frac{\sigma T}{8}\delta g\frac{h^2}{\tau_{кр}} = \frac{\pi\sigma}{2}\delta\frac{g}{H}r^3. \qquad (2)$$

В открытом море на достаточно большом расстоянии от наветренного берега можно будет записать уравнение баланса энергии волн на мелководье, вспомнив выражение мощности W_v, передаваемой волне ветром (формулу (1) из статьи [1]), и выражение мощности W_μ, поглощаемой внутренним турбулентным трением (формулу (2) оттуда же):

$$\delta g r \frac{dr}{dt} = A r (V - c)^2 - q r^2 - \frac{\pi\sigma}{2} \delta \frac{g}{H} r^3. \tag{3}$$

Отсюда после деления обеих частей равенства на $\delta g r$ получается простое дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{dt} = a - br - cr^2, \tag{4}$$

в котором сокращенно обозначено

$$a = \frac{A}{\delta g}(V - c)^2; \qquad b = \frac{q}{\delta g}; \qquad c = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{H}. \tag{5}$$

Интеграл уравнения (4) записывается так:

$$\frac{b + 2cr}{\sqrt{4ac + b^2}} = \operatorname{th}\left(\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}\, t\right). \tag{6}$$

Преобразуем (6), прибегнув к безразмерным величинам вместо t и r. С этой целью отметим прежде всего, что на основании (4) производная dr/dt обращается в нуль при предельной полувысоте r_2 волн, причем:

$$a - br_2 - cr_2^2 = 0. \tag{7}$$

Отсюда определяется величина полувысоты волн r_2, достижимая в условиях мелководья на достаточно большом расстоянии от наветренного берега:

$$r_2 = \frac{1}{2c}\left[-b + \sqrt{4ac + b^2}\right]. \tag{8}$$

Здесь она играет ту же роль, какую играет «физически предельная» полувысота волн r_∞ на глубоком море.

Исходя отсюда, введем обозначения

$$r = r_2\eta; \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}}. \tag{9}$$

Подставив эти выражения аргумента t и функции r через соответствующие безразмерные величины τ и η в (6), получим вместо него совсем простое соотношение

$$\eta = \operatorname{th}\tau, \tag{10}$$

в котором* истинные масштабы времен и высот определяются по (8), (9). Выразим эти масштабы через величины, поддающиеся непосредственному определению на основании опытов в штормовом бассейне.

Прежде всего, опыты показывают, что в (8) можно пренебречь величиной b^2 по сравнению с $4ac$ под корнем и величиной b — по сравнению с $2\sqrt{ac}$. Тогда, вернувшись к обозначениям (5), запишем вместо (8):

$$r_2 = (V - c)\sqrt{\frac{2A}{\pi\sigma}\frac{H}{g}}. \tag{11}$$

---

* Не надо смешивать безразмерную величину τ с $\tau_{крит}$, выражаемой в секундах, в формулах (1) и (2).

Итак, предельная полувысота на мелководном море в достаточном удалении от наветренного берега пропорциональна первой степени скорости ветра относительно бегущих волн, а не квадрату этой скорости, как на глубоком море ([1]). Предельная полувысота волн r_2 еще пропорциональна корню квадратному из глубины H мелководного моря.

Оба вывода теории отлично оправдываются и на опытах в штормовом бассейне, и при наблюдениях в природных условиях. Для вычисления r_2 следует лишь определить из опытов единственную неизвестную величину σ, поскольку величина A была нами определена ранее также на основании опытов ([3]).

Столь же просто определяется масштаб времен. На основании (9) и (5) оказывается

$$\frac{\tau}{t} = (V - c)\sqrt{\frac{\pi}{\sigma A}\frac{g}{H}}. \qquad (12)$$

Весьма замечательно, что все экспериментальные кривые, полученные нами при опытах в бассейне, обнаружили свойство, присущее гиперболической тангенсоиде: на всех на них наблюдалась точка наибольшей кривизны. На основании уравнения (10) эта точка определится из условия $d^3\eta/dt^3 = -2 + 4\eta_0^2 = 0$, откуда следует $\eta_0 = 1/\sqrt{2}$. С учетом масштабов оказалось, что именно здесь наблюдается наибольшая кривизна у всех экспериментальных кривых.

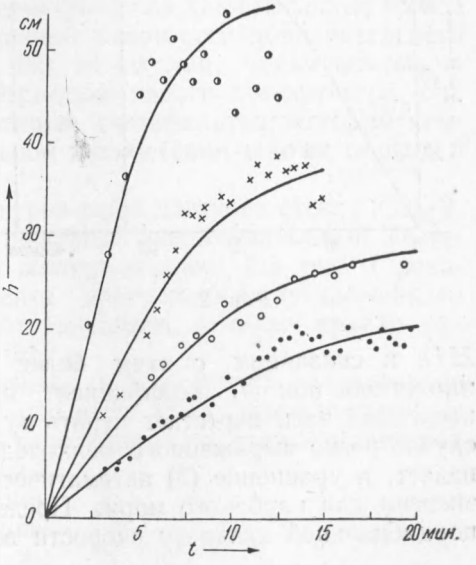


Рис. 1

Воспользуемся сейчас семейством экспериментальных кривых, собранных на рис. 5 в статье ([3]), и по одной из этих кривых определим неизвестную величину σ.

После этого вычислим теоретические кривые нарастания высоты волн во времени применительно ко всем четырем значениям скорости ветра $(V - c)$ относительно бегущих волн и к заданной глубине бассейна H.

Результаты вычислений изображены на рис. 1, причем на диаграмму перенесены экспериментальные точки с рис. 5 цитированной статьи. Как видим, теоретические кривые очень хорошо ложатся среди соответствующих экспериментальных точек. О причинах разброса говорилось подробно в статье ([3]).

Следует остановиться лишь на одном новом обстоятельстве, не исследованном в предыдущих статьях: на роли нарастания фазовой скорости волн c в продолжение опытов. При выводе основного соотношения (10) предполагалось, что эта скорость постоянна и что при постоянной же скорости ветра V остается неизменным величина относительной скорости $(V - c)$. Учет изменений $(V - c)$ при выводе (10) сделал бы задачу неразрешимой до конца аналитическими методами. Однако изменения величины $(V - c)$ легко могут быть учтены путем изменения масштабов в соответствии с (5), (8), (9): ведь величина относительной скорости волн меняется медленно, и такой прием не поведет к серьезным погрешностям.

В качестве примера на рис. 2 приведена экспериментальная кривая. Здесь высота волн достигла некоторого максимума, после чего стала

уменьшаться, невзирая на то, что скорость ветра V оставалась постоянной. Это объясняется именно тем, что даже после достижения максимальной возможной высоты волн их длина, а значит и фазовая скорость продолжали увеличиваться. Тем самым вызывалось уменьшение относительной скорости $(V - c)$, а значит, и масштабов, соответствующих этой величине по формулам (5), (8), (9).

Непосредственные промеры по рис. 2 показали, что действительно соблюдается пропорция

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{(V - c_3)}{(V - c_2)},$$

где через r_2 попрежнему обозначена максимальная амплитуда (полувысота) волн, r_3 — амплитуда их в последний момент времени на диаграмме, c_2 — фазовая скорость волн в момент достижения максимума амплитуды и c_3 — фазовая скорость в последний момент на диаграмме.

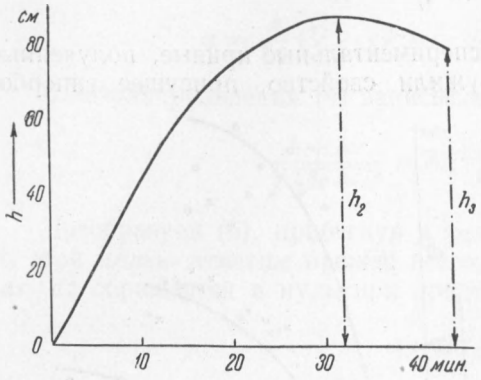


Рис. 2

Еще отметим, что при недостаточно малом значении характеристической величины $\alpha = 2\pi \frac{H}{\lambda}$ соотношения (1), (2), (3), (5), (11), (12) должны быть исправлены путем умножения величины H на поправочный множитель $\mathrm{sh}\, 2\alpha / 2\alpha$. В частности, это пришлось сделать и при вычислении кривых, изображенных на рис. 1. Как видно из (3), при нарастании величины H/λ и связанном с этим более резком нарастании поправочного множителя при H, коэффициент при r^3 непрерывно уменьшается, и последний член перестает играть ту решающую роль, какую он играет в случае резко выраженного мелководья. В пределе этот член совсем пропадает, и уравнение (3) автоматически переходит в уравнение баланса энергии для глубокого моря. Предельная высота волн становится пропорциональной квадрату скорости ветра относительно волн.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
25 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Шулейкин, ДАН, 98, № 3, 381 (1954). [2] В. В. Шулейкин, АН СССР, сер. геофиз., № 1, 65 (1954). [3] В. В. Шулейкин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 451 (1954).