Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

ФИЗИКА

А. В. ГУРЕВИЧ

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 18 IV 1955)

1. Функция распределения электронов по скоростям в плазме в постоянных электрическом и магнитном полях с учетом упругих соударений электронов с молекулами или ионами была получена Давыдовым (1).

В нестационарных полях энергия электронов непосредственно изменяется лишь вследствие действия электрического поля. Поэтому, в зависимости от соотношения между временем t_E, в течение которого существенно изменяется электрическое поле (например, если $E = E_0 \cos \omega t$, то $t_E \sim 1/\omega$), и временем t_p релаксации энергии электронов ($t_p \approx 1/\delta\nu$, где ν — частота соударений электрона, $\delta = 2m/M$, m — масса электрона и M — масса молекулы или иона), можно выделить случаи медленно ($t_E \gg t_p$) и быстро ($t_E \ll t_p$) изменяющихся полей. В первом случае, являющемся квазистационарным, для функции распределения справедливо выражение, полученное в (1), где E — функция времени. В быстропеременном поле, когда время релаксации t_p много больше, чем t_E, средняя энергия электронов не может изменяться так же быстро, как электрическое поле. Поэтому симметричная часть функции распределения должна быть в нулевом приближении стационарной. Заметим также, что, поскольку время релаксации для тока $t_j \approx 1/\nu \ll 1/\delta\nu \approx t_p$, то в быстропеременных полях ($t_E \ll t_p$) характер распределения должен различаться в зависимости от соотношения между t_E и t_j.

Результаты решения кинетического уравнения с учетом переменного электрического и постоянного магнитного полей сообщаются в настоящей работе. Аналогичная задача рассматривалась в (2); однако при расчетах в этой работе были опущены существенные члены, что привело авторов к неправильному результату (см. ниже).

2. Если рассматривать только упругие соударения электронов с тяжелыми частицами плазмы — молекулами или ионами, то, как показано в (1), функцию распределения электронов $f(\mathbf{v}, t)$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{v}, t) = f_0(v, t) + \frac{\mathbf{v}}{v}\mathbf{f}_1(v, t) + \chi(\mathbf{v}, t), \qquad (1)$$

где $|\chi(\mathbf{v}, t)| \ll |\mathbf{f}_1(v, t)| \ll |f_0(v, t)|$; и для функций f_0 и $\mathbf{f}_1$ в (1) получена следующая приближенная система уравнений (при выводе уравнений (2) пренебрегалось членами порядка χ):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{e}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 \mathbf{E}\mathbf{f}_1) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{kT}{M}\nu v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{m}{M}\nu v^3 f_0\right\} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \frac{e\mathbf{E}}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{e}{mc}[\mathbf{H}\mathbf{f}_1] + \nu \mathbf{f}_1 = 0.$$

Здесь

$$\nu(v) = Nv \int_\omega q(v, \theta)(1 - \cos\theta)\, d\omega$$

частота соударений электрона (см. [3], § 59); N — плотность молекул (ионов); $q(v, \theta)$ — дифференциальное эффективное сечение соударения электрона с молекулой (ионом).

В быстропеременном электрическом поле:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \sim \frac{f_0}{t_E} \gg \frac{f_0}{t_p} \sim \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\nu\frac{kT}{M}v^2\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{m}{M}\nu v^3 f_0\right\},$$

и поэтому решение уравнений (2) можно найти, воспользовавшись методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} f_0(v, t) &= f_{00}(v, t) + f_{01}(v, t) + \ldots; \\ \mathbf{f}_1(v, t) &= \mathbf{f}_{10}(v, t) + \mathbf{f}_{11}(v, t) + \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

где $|f_{01}| \sim \frac{t_E}{t_p}|f_{00}|$; $|\mathbf{f}_{11}| \sim \frac{t_E}{t_p}|\mathbf{f}_{10}|$. В нулевом приближении получаем:

$$f_{00} = f_{00}(v) = C\exp\left\{-\int\frac{mv\,dv}{kT + \frac{e^2E_0^2}{3m\delta}\varphi(v)}\right\}; \tag{4}$$

$$\mathbf{f}_{10} = \frac{eE_0}{2\left(kT + \frac{e^2E_0^2}{3m\delta}\varphi(v)\right)} f_{00}\left\{\frac{(i\omega+\nu)^2\frac{\mathbf{E}_0}{E_0} + \omega_H^2\cos\beta\,\frac{\mathbf{H}}{H_0} + \omega_H(i\omega+\nu)\frac{[\mathbf{H}_0\mathbf{E}_0]}{H_0E_0}}{(i\omega+\nu)[\omega_H^2 + (i\omega+\nu)^2]}e^{i\omega t} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-i\omega+\nu)^2\frac{\mathbf{E}_0}{E_0} + \omega_H^2\cos\beta\,\frac{\mathbf{H}_0}{H_0} + \omega_H(-i\omega+\nu)\frac{[\mathbf{H}_0\mathbf{E}_0]}{H_0E_0}}{(-i\omega+\nu)[\omega_H^2 + (-i\omega+\nu)^2]}e^{-i\omega t}\right\}. \tag{4'}$$

Здесь β — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$; $\omega_H = eH/mc$ — гиромагнитная частота;

$$\varphi(v) = \frac{\cos^2\beta}{\omega^2+\nu^2} + \frac{\sin^2\beta}{2}\left\{\frac{1}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2} + \frac{1}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2}\right\}. \tag{5}$$

Функция распределения (4) в отсутствие магнитного поля совпадает с полученной в [4, 5]. Заметим также, что хотя предельный переход при $\omega \to 0$ запрещен условиями $t_E \ll t_p$ (см. также (11)), выражения (4) при $\omega = 0$ совпадают с полученными в [1] для постоянного электрического поля (если заменить E на $E_{эф} = E_0/\sqrt{2}$).

При соударениях с молекулами (когда можно принять молекулу за твердый шарик радиуса a) функция распределения (4) при выполнении условий:

$$\omega^2 \gg \frac{2eE_0\pi a^2N_м}{\sqrt{3}\sqrt{\delta m}}, \quad (\omega-\omega_H)^2 \gg \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{eE_0\pi a^2N_м}{\sqrt{\delta m}}\sin\beta \tag{6}$$

максвелловская с эффективной температурой

$$T_{эф} = T\left\{1 + \frac{e^2E_0^2}{3m\delta kT\omega^2}\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\,\frac{\omega^2(\omega^2+\omega_H^2)}{(\omega^2-\omega_H^2)^2}\right)\right\}. \tag{7}$$

Если, наоборот,

$$(\omega+\omega_H)^2 \ll \frac{2eE_0\pi a^2N_м}{\sqrt{3}\sqrt{\delta m}}, \tag{8}$$

$$\frac{eE_0}{\sqrt{3}\sqrt{\delta kT\pi a^2 N_м}} \gg 1, \tag{9}$$

то распределение (4) — типа Драверштейна с эффективным полем

$$E_{эф} = E_0/\sqrt{2}.$$

При соударениях с ионами, если:

$$\frac{\sqrt{2}\omega (kT)^{3/2}}{\pi e^4 N_i \ln\left(\frac{k^3T^3}{2\pi N_i e^6}\right)} \gg 1, \tag{10}$$

то функция распределения электронов — максвелловская с эффективной температурой (7).

Определяя последующие члены разложения (3) и сравнивая их с (4), находим, что выражения (4) справедливы при условиях

$$\frac{2\sqrt{2}\sqrt{kT}\delta\pi a^2 N_м}{\sqrt{m}\omega}\left(\frac{eE_0}{3\sqrt{\delta kT\pi a^2 N_M}}\right)^{1/2} \tag{11}$$

для соударений с молекулами и

$$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\pi e^2 N_i \sqrt{m}\,\delta \ln\left(\frac{k^3T^3}{2\pi N_i e^6}\right)}{E_0 kT}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{eE_0}{\omega\sqrt{kTM}} \ll 1 \tag{12}$$

для соударений с ионами. Заметим, что условия (11) не совпадают с указанными в [5].

3. Воспользовавшись функцией распределения (4), можно определить среднюю энергию электронов ε и проводимость плазмы σ.

В отсутствие магнитного поля в сильном (условия (9)) переменном электрическом поле:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT\left(1 + \frac{e^2E_0^2}{3kTm\delta\omega^2}\right)\frac{xD_{-5/2}(x)}{D_{-3/2}(x)},$$
$$\sigma = \frac{8}{\sqrt{3\pi}}\frac{en}{E_0}\sqrt{\frac{kT\delta}{m}}\left(1 + \frac{e^2E_0^2}{3kTm\delta\omega^2}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{x}\,D_{-3}(x)}{D_{-3/2}(x)}. \tag{13}$$

Здесь

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\omega^2 m\sqrt{\delta}}{\pi a^2 N_м eE_0};$$

n — плотность электронов; $D_p(x)$ — функция параболического цилиндра порядка p. Выражения (13) в предельных случаях $x \gtrless 1$ существенно упрощаются. Если $x \gg 1$, то

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT\left(1 + \frac{e^2E_0^2}{3kTm\delta\omega^2}\right); \quad \sigma = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\frac{e^2n\sqrt{kT}\pi a^2 N_м}{m^{3/2}\omega^2}\left(1 + \frac{e^2E_0^2}{3kTm\delta\omega^2}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Напротив, при $x \ll 1$

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(5/4)}{\sqrt{3}\,\Gamma(3/4)}\frac{eE_0}{\sqrt{\delta\pi a^2 N_м}}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/2}3^{3/4}\Gamma(3/4)}\frac{ne^{3/2}\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{\pi a^2 N_м E_0 m}}. \tag{15}$$

Средняя энергия электронов и проводимость плазмы в отсутствие магнитного поля являются, согласно (13)—(15), монотонными функциями параметров.

Те же выражения (13)—(15) для ε и σ_{zz} ($\overrightarrow{Oz} \parallel \mathbf{H}$), справедливы и при наличии постоянного магнитного поля, если $\beta = 0$, что и должно быть, так как магнитное поле не влияет на движение электронов в направлении, параллельном $\mathbf{H}$. Наиболее сильное влияние магнитное поле оказывает на движение электронов в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, т. е. при $\beta = \pi/2$. При этом в сильном (9) электрическом поле, если выполняется условие:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{m\sqrt{\delta}(\omega+\omega_H)^2}{eE_0\pi a^2 N_м} \gg 1, \tag{16}$$

средняя энергия электронов дается попрежнему формулами (13)—(15), в которых следует заменить E_0 и ω их эффективными значениями:

$$E_0' = E_0\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{(\omega-\omega_H)^2}{2(\omega+\omega)_H)^2}}; \quad \omega' = |\omega-\omega_H|, \tag{17}$$

а компоненты тензора проводимости имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{(\omega-\omega_H)^2}{(\omega+\omega_H)^2}\right)\sigma(E_0',\omega'),\\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} = -i\frac{2\omega\omega_H}{(\omega+\omega_H)^2}\sigma(E_0',\omega'),\end{aligned} \tag{18}$$

где $\sigma(E_0', \omega')$ также дается выражениями (13)—(15), (17). Из (13), (17), (18) видно, что при $x_H \gg 1$ в сильном электрическом поле имеет место резонансное возрастание энергии электронов и проводимости плазмы в окрестности гирочастоты. В этом случае при $\omega = \omega_H$

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(5/4)}{\sqrt{6}\,\Gamma(3/4)}\frac{eE_0}{\pi a^2 N_м\sqrt{\delta}}; \quad \sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/4}3^{3/4}\Gamma(3/4)}\frac{ne^{3/2}\sqrt[4]{\delta}}{\sqrt{\pi a^2 N_м E_0 m}}. \tag{19}$$

Аналогичное резонансное возрастание проводимости имеет место и в слабом электрическом поле; высота резонанса, как видно из (19), падает с ростом напряженности электрического поля. В случае, если выполняются условия, противоположные (16), ε и σ даются формулами (15).

В заключение автор выражает благодарность Я. Л. Альперту за руководство работой и ценные советы и Л. Д. Ландау за ряд существенных замечаний при обсуждении результатов работы.

Научно-исследовательский институт
земного магнетизма

Поступило
18 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, **7**, 1069 (1937); **6**, 463 (1936). [2] M. Jancel, T. Kahan, C. R., **236**, 788 (1953). [3] Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, М., 1953. [4] H. Margenau, Phys. Rev., **69**, 508 (1946). [5] H. Margenau, L. M. Hartman, Phys. Rev., **73**, 309 (1948).