Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

ФИЗИКА

Л. П. ГОРЬКОВ и И. М. ХАЛАТНИКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГРИНОВСКИХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ НУЛЬ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 10 III 1955)

В предыдущей работе ([1]), посвященной электродинамике частицы со спином нуль, основываясь на требовании перенормируемости, удалось найти асимптотический вид гриновских функций в приближении, учитывающем только такие члены, в которые логарифм импульса входит в степени, равной порядку возмущений. В β-формализме гриновская функция мезона состоит из скалярной, векторной и тензорной компонент, перенормирующихся по-разному. Мы покажем, что при специальном выборе продольной части гриновской фотонной функции, равной ее поперечной части, задача существенно упрощается, и в рассматриваемом приближении можно говорить о перенормировках соответствующих операторов гриновских функций и вершинных частей. Для этой цели будем непосредственно решать интегральные уравнения, которым удовлетворяют искомые величины. В ([1]) было найдено, что при специальном выборе продольной части $d_l = d_t$ комптоновские диаграммы становятся конечными, вследствие чего достаточно ограничиться отысканием операторов вершинной части и гриновских функций мезона и фотона. Кроме того, в выражение для вершинной части в рассматриваемом приближении дают вклад только диаграммы с непересекающимися фотонными линиями, что позволяет пользоваться приближенным интегральным уравнением для вершинной части $B_\sigma(p, p-l, l)$. Перепишем это уравнение, сделав в интеграле (7) ([1]) замену переменной интегрирования $p - k \to k$:

$$B_\sigma(p, p-l, l) = \beta_\sigma + \frac{e_1^2}{\pi i}\int B_\mu(p, k, p-k)\,G(k)\,B_\sigma(k, k-l, l)\times \\ \times G(k-l)\,B_\mu(k-l, p-l, k-p)\,D(p-k)\,d^4k. \qquad (1)$$

Для $G(p)$ и $D(k)$ имеют место обычные уравнения электродинамики (2, 3) ([1]). Мы будем искать асимптотические выражения входящих сюда величин в виде:

$$G(p) = \frac{1}{\hat{p} + m_1(p^2) + \left\{\frac{1}{m_1(p^2)}(\hat{p}^2 - p^2) + \frac{\nu\varepsilon}{m_1}\right\}}\,\frac{\beta(p^2)}{p^2 - m_1^2(p^2) - \varepsilon}, \\ B_\sigma(p, p-l, l) = \beta_\sigma\,\alpha(f^2), \quad D(k^2) = d(k^2)/k^2. \qquad (2)$$

Функция $\beta(p^2)$, $m_1(p^2)$, $d(k^2)$, $\alpha(f^2)$ — медленно меняющиеся функции своих аргументов; p^2, k^2 — пространственные вектора; f^2 — наибольших из трех аргументов в $B_\sigma(p, p-l, l)$, относительно которых предполагается, что они удовлетворяют «правилу треугольника» ([2]); ε — квадратичный интеграл массы. При подстановке этих выражений в уравнение (1) и после упрощения всех членов, стоящих под интегралом, оказывается, что интеграл расходится логарифмически в области больших — $k^2 \gg f^2$.

Эта область интегрирования и дает логарифмический вклад. Для непосредственного выполнения интегрирования оказывается возможным перейти к интегрированию по евклидову пространству при помощи преобразования (2): $d^4k \to {}^1/_4\, i(-k^2)\, d(-k^2)$. В результате правая часть оказывается снова имеющей вид (2), и для функции $\alpha(f^2)$ получается уравнение

$$\alpha(\xi) = 1 - \frac{e_1^2}{8\pi}\int_{\xi}^{L} \alpha^3(z)\,\beta^2(z)\,d(z)\,dz, \quad \text{где } \xi = \ln\frac{-p^2}{m^2},\ L = \ln\frac{\Lambda^2}{m^2}. \tag{3}$$

Подстановка выражений (2) в интегральное уравнение (2) ([1]) для $G(p$ приводит к интегралу, расходящемуся квадратично в области $k^2 \gg p^2 \gg m^2$; квадратично расходящийся интеграл выделяется и представляет собой добавку к массе порядка $\sim e_1^2\Lambda^2$. Чтобы получить уравнение для функции $\beta(p^2)$, необходимо определить из (1) поправки к $B_\sigma(p,\ p-l,\ l)$ при $l \gg p$ с точностью до членов $\sim p^2/l^2$ включительно. Непосредственное их вычисление достаточно громоздко, потому мы в дальнейшем воспользуемся тождеством Уорда:

$$\alpha(\xi)\,\beta(\xi) = 1; \tag{4}$$

с этим условием уравнение (3) переписывается в виде

$$\alpha(\xi) = 1 - \frac{e_1^2}{8\pi}\int_{\xi}^{L} \alpha(z)\,d(z)\,dz. \tag{5}$$

Для нахождения уравнения, которому удовлетворяет функция $d(z)$, рассмотрим уравнение (3) ([1]) для фотонной гриновской функции. Входящий сюда интеграл по p расходится квадратично в области $p \gg k$. Выделение квадратичной части с последующим интегрированием по углам опять приводит к логарифмическому интегралу. Квадратично расходящийся интеграл представляет собой фотонную массу и на основании соображений градиентной инвариантности должен полагаться равным нулю. Для вычисления тока поляризации необходимо, однако, знать логарифмические поправки к $B_\delta(p,\ p-l,\ l)$ в области $p \gg l$ до второго порядка по l/p включительно. Обращаясь снова к уравнению (1), можно видеть, что такие поправки возникают от разложения $B_\sigma(k,\ k-l,\ l)$ и $G(k-l)$ в области интегрирования $p \gg k \gg l$. (Членами порядка $\sim l^2/p^2$ под интегралом можно пренебречь по сравнению с k^2/p^2.) Чтобы выяснить их вид, рассматриваются добавки, индуцируемые при разложении знаменателей в $G(k)$ и $G(k-l)$ по степеням l/k, $(m_1^2+\varepsilon)/k^2$. В результате оказывается, что в области $p \gg l$ $B_\sigma(p,\ p-l,\ l)$ можно искать в виде:

$$B_\sigma(p,\ p-l,\ l) = \beta_\sigma\alpha(p^2) + (\hat{l}\,l_\sigma - \beta_\sigma l^2)\,\alpha^2(p^2)\,d(p^2)\,S_0(p^2, l^2)\cdot(1/p^2). \tag{6}$$

При подстановке этого выражения в (1) для функции $S_0(p^2,\ l^2)$ получается уравнение

$$S_0(\xi,\ \eta) = -\frac{e_1^2}{8\pi}\int_{\eta}^{\xi} \alpha^2(z)\,\beta^2(z)\,d(z)\,S_0(z,\ \eta)\,dz + \frac{e_1^2}{24\pi}\int_{\eta}^{\xi} \alpha(z)\,\beta^2(z)\,dz. \tag{7}$$

Вычисление тока поляризации с выражением (6) для вершинной части приводит к уравнению для $d_t(k^2)$:

$$d_t(\eta)\left[1 - \frac{e_1^2}{4\pi}\int_{\eta}^{L} \alpha^2(z)\,\beta^2(z)\,d(z)\,S_0(z,\eta)\,dz + \frac{e_1^2}{12\pi}\int_{\eta}^{L} \alpha(z)\beta^2(z)\,dz\right] = 1 \tag{8}$$

или

$$d_t^{-1}(\eta) = 1 + 2S_0(L,\ \eta), \tag{9}$$

где L — логарифм параметра обрезания.

Уравнения (5), (7) и (8) необходимо теперь решать совместно, полагая $d_l(z) = d_t(z) = d(z)$. Дифференцируя (7) по ξ, используя соотношения (4) и (5), легко найдем для функции $S_0(\xi, \eta)$ выражение

$$S_0(\xi, \eta) = (e_1^2/24\pi)(\xi - \eta)\beta(\xi). \tag{10}$$

На верхнем пределе интегрирования $\beta(\xi)$ обращается в единицу, соответственно предполагаемому исчезновению взаимодействия выше обрезания. Интересно, что функция $S_0(\xi, \eta)$ в точности совпадает с такой же функцией в спинорной электродинамике ([2]). Вследствие этого легко теперь учесть, что, помимо поляризации фотоном вакуума частиц со спином нуль, реально происходит поляризация вакуума частиц со спином $^1/_2$. Воспользовавшись результатами ([2]), вместо (9) можем написать

$$d_t^{-1}(\eta) = 1 + 2S_0(L, \eta) + 8S_{1|_2}(L, \eta) = 1 + 8\nu S(L, \eta),$$

откуда для $d_t(\eta)$ получаем выражение

$$d_t^{-1}(\eta) = 1 + (e_1^2/3\pi)\nu(L, -\eta).$$

В величину ν, играющую роль эффективного числа сортов различных частиц, спин $^1/_2$ дает вклад 1, спин нуль $^1/_4$. Таким образом:

$$d_t(k^2) = [1 + (e_1^2\nu/3\pi)\ln(\Lambda^2/-k^2)]^{-1}, \tag{11}$$

в полном согласии с выражением (9) в ([1]). Отметим, что эта формула справедлива и при $k^2 \gtrsim m^2$, поскольку в уравнениях (7), (8) выпали как m_1, так и ε. При $k^2 \ll m^2$ получим

$$d_t = [1 + (e_1^2\nu/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)]^{-1},$$

соответственно тому, что область интегрирования лежит выше m. Здесь можно отождествить m с экспериментальной массой, определяемой соотношением $m^2 = m_1^2(m^2) + \varepsilon$.

Перенормированный заряд равен:

$$e^2 = e_1^2[1 + e_1^2(\nu/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)]^{-1} \tag{12}$$

и функция $d_{tc}(k^2)$:

$$d_{tc}(k^2) = [1 - e_1^2(\nu/3\pi)\ln(-k^2/m^2)]^{-1}. \tag{13}$$

Отсюда видно, что с увеличением импульса взаимодействие становится сильным. С найденным выражением $d_t(k^2)$ легко найти функции $\beta(p^2)$ и $m_1(p^2)$. Интегрируя уравнение (5), получим:

$$\alpha(\xi) = \exp\left\{-\frac{e_1^2}{8\pi}\int_{\xi}^{L} d(z)\,dz\right\}.$$

Подставляя сюда выражение (11) и производя элементарное интегрирование по z, найдем $\alpha(\xi)$. Функция $\beta(\xi) = \alpha^{-1}(\xi)$ имеет вид:

$$\beta(p^2) = \left(1 + \frac{e_1^2}{3\pi}\nu\ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{3/8\nu} = \left(\frac{e_1^2 d_t(p^2)}{e_1^2}\right)^{-3/8\nu} \tag{14}$$

и может быть выражена через свое переномированное выражение:

$$\beta(p^2) = (e_1/e)^{3/4\nu}(d_{tc}(p^2))^{-3/8\nu}. \tag{15}$$

Интересно, что при увеличении импульса эта функция убывает, приводя к нулю в той же точке, в которой обращается в нуль знаменатель

функции $d_t(k^2)$. Проведенное рассмотрение оправдывает применение метода [3] и приводит к тем же результатам в отношении асимптотики функций $d(k^2)$ и $\beta(k^2)$. Для нахождения функции $m_1(p^2)$ нет нужды решать снова интегральные уравнения, так как она может быть найдена по функции $\beta(p^2)$ в компоненте $G_{55}(p)$ функции Грина. В самом деле, компонента $G_{55}(p)/m_1$ представляет собой функцию распространения мезона в скалярной формулировке теории частицы со спином нуль, и поэтому метод [3] к ней полностью применим. В результате для $m_1(p^2)$ справедливо выражение (15) [1]. Отметим, что отказ от условия равенства поперечной и продольной частей гриновской функции фотона нарушает показанное нами большое формальное сходство электродинамики спина нуль с электродинамикой электрона. В этом случае становится необходимым при отыскании соответствующих операторов включать в число неизвестных расходящиеся теперь комптоновские диаграммы. Интересно, что, помимо расходимостей в диаграмме собственной энергии мезона от продольной части фотонной функции Грина, появляются расходимости, обязанные поперечной части. Поэтому наиболее удобным выбором произвольного $d_l(k^2)$, в отличие от электродинамики, является выбор $d_l = d_t$. Выражения для векторной и скалярной частей гриновской функции мезона в случае произвольного $d_l(k^2)$ можно написать при помощи соответствующего градиентного преобразования [4] формул, полученных при $d_l = d_t$. Для скалярной компоненты $G_{55}(p)$ имеем при $-p^2 \gg m^2$:

$$G_{55}(p) \simeq m_1 \left(1 + \frac{e_1^2}{3\pi} \nu \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{9/4\nu} \exp\left\{\frac{-e_1^2}{4\pi} \int_{\ln(-p^2/m^2)}^{\ln(\Lambda^2/m^2)} d_l(z)\, dz\right\} \frac{1}{p^2}. \qquad (16)$$

Для векторной компоненты $G_{i5}(p)$:

$$G_{i5}(p) \simeq \left(1 + \frac{e_1^2}{3\pi} \nu \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{9/8\nu} \exp\left\{\frac{-e_1^2}{4\pi} \int_{\ln(-p^2/m^2)}^{\ln(\Lambda^2/m^2)} d_l(z)\, dz\right\} \frac{p_l}{p^2}. \qquad (17)$$

Сравнение (17) и (16) с формулами (12 a, b) [1] показывает, что функция $m_1(p^2)$ действительно не зависит от $d_l(k^2)$.

Градиентное преобразование тензорной компоненты $G_{ik}(p)$ гриновской функции мезона более сложно. Записав $G_{ik}(p)$ в виде

$$G_{ik}(p) = (p_i p_k/p^2 - {}^1/_4\delta_{ik})\,\lambda(p^2) - {}^3/_4\delta_{ik}\mu(p^2)$$

и действуя по методике [4], получим выражения для $\lambda(\xi)$ и $\mu(\xi)$, справедливые при произвольном $d_l(z)$:

$$\lambda(\xi) = \exp\left\{-\frac{e_1^2}{4\pi}\int_{\xi}^{L} d_l(z)\,dz\right\}; \quad \mu(\xi) = 1 - \frac{e_1^2}{4\pi}\int_{\xi}^{L} \lambda(z)\, d_t(z)\, dz; \qquad (18)$$

при $d_l = d_t$, как видно из (18), $\mu(\xi) - \lambda(\xi)$; при $d_l = 0$ функция $\lambda(\xi)$ обращается в единицу, а $\mu(\xi)$ переходит в

$$\mu(\xi) = 1 - \frac{3}{4\nu} \ln\left[1 + \frac{e_1^2 \nu}{3\pi}(L - \xi)\right].$$

Авторы выражают глубокую благодарность акад. Л. Д. Ландау за ценные советы и обсуждение результатов настоящей работы.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. П. Горьков, И. М. Халатников, ДАН, 103, № 5 (1955). [2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, 497, 773, 1177 (1954). [3] M. Gell-Mann, F. E. Low, Phys. Rev., 95, 1300 (1954). [4] Л. Д. Ландау, И. М. Халатников, ЖЭТФ, 29, № 1(7), 89 (1955).