Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Е. И. ШЕМЯКИН

ЗАДАЧА ЛЕМБА ДЛЯ СРЕДЫ С УПРУГИМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 V 1955)

В настоящей заметке рассматриваются динамические задачи для среды с упругим последействием. Основной задачей является задача для полупространства, заполненного средой с упругим последействием, при сосредоточенных воздействиях на его границе или во внутренних точках (задача Лемба). Некоторые простейшие динамические задачи для среды с упругим последействием рассматривались в работах ([1],[2]).

1. Предполагаем, следуя ([3]), что напряжения и деформации связаны соотношениями

$$\sigma_{zz}(t) = \lambda\theta(t) + 2\mu\frac{\partial w(t)}{\partial z} - \int_0^t \left[\lambda'\theta(\tau) + 2\mu'\frac{\partial w(\tau)}{\partial z}\right] h(t,\tau)\,d\tau,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$\tau_{zy}(t) = \tau_{yz}(t) = \mu\left[\frac{\partial w(t)}{\partial y} + \frac{\partial v(t)}{\partial z}\right] - \mu'\int_0^t \left[\frac{\partial w(\tau)}{\partial y} + \frac{\partial v(\tau)}{\partial z}\right] h(t,\tau)\,d\tau.$$

В (1) приняты обозначения, обычные в теории упругости; λ', μ' — некоторые введенные нами постоянные и $h(t,\tau)$ удовлетворяет следующим условиям: а) $h(t,\tau)$ зависит от разности аргументов $h(t,\tau) \equiv h(t-\tau)$ (Вольтерра); б) $h(t)$ — положительная и убывающая функция при $t\to\infty$; в) $\mu'\int_0^\infty h(\tau)\,d\tau < \mu$ (Гоголадзе).

В дальнейшем также предполагается, что

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu} \equiv \omega \qquad (2)$$

— ограничение, несущественное для качественного исследования.

Обычным образом при помощи (1) получаем интегро-дифференциальные уравнения движения в смещениях среды с упругим последействием, вводим скалярный φ и векторный $\vec{\psi}$ потенциалы поля смещений, так что получим следующую постановку основной задачи:

Найти в полупространстве $z>0$, покоящемся при $t<0$, функции $\varphi(x,y,z,t)$ и $\vec{\psi}(x,y,z,t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi(t) - \omega\int_0^t h(t-\tau)\,\Delta\varphi(\tau)\,d\tau, \quad b^2\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = \Delta\vec{\psi}(t) - \omega\int_0^t h(t-\tau)\Delta\vec{\psi}(\tau)\,d\tau, \qquad (3)$$

(где $a = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}$, $b = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$, ρ — плотность, Δ — оператор Лапласа),

при нулевых начальных данных

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{\psi} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{4}$$

и следующих граничных условиях при $z = 0$:

$$\sigma_{zz} = \ldots, \quad \tau_{zx} = \ldots, \quad \tau_{zy} = \ldots; \tag{5}$$

для получения правых частей (5) необходимо записать (1) в потенциалах $\varphi(x, y, z, t)$ и $\vec{\psi}(x, y, z, t)$.

В качестве «функций воздействия» σ_{zz}, τ_{zx}, τ_{zy} рассматриваем функции типа

$$\sigma = \frac{\delta(r)}{r} a(t) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Для уравнений движения среды с упругим последействием справедлива теорема о единственности решения краевой задачи одного из трех типов, известных и в классической теории упругости.

2. Построение решения методом неполного разделения переменных, развитым в работах ([5],[6]) и содержащим в основе одностороннее преобразование Лапласа, помогает преодолеть как трудности обычного построения решения пространственной задачи, так и трудности, связанные с рассмотрением интегро-дифференциальных уравнений (3) и условий (5).

Типичным для построенного решения является следующее слагаемое, участвующее в описании поля смещений:

$$I = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{A(s) M_a}{[1 - \omega H(s)] R(s)} e^{st - zM_b} ds \right\} k^3 J_0(k\tau)\, dk. \tag{6}$$

Здесь

$$H(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt, \quad A(s) = \int_0^\infty a(t) e^{-st} dt,$$

$$M_a = \sqrt{\frac{a^2 s^2}{1 - \omega H(s)} + k^2}, \quad M_b = \sqrt{\frac{b^2 s^2}{1 - \omega H(s)} + k^2},$$

$$R(s) = \left[\frac{b^2 s^2}{1 - \omega H(s)} + 2k^2 \right]^2 - 4k^2 M_a M_b,$$

$J_0(kr)$ — функция Бесселя нулевого порядка вещественного аргумента; контуром интегрирования является прямая $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 0$ и $\arg M_a = \arg M_b = 0$ при $s > 0$.

3. Непосредственное изучение решения в виде (6) и (7) без дальнейших предположений относительно $h(t)$ кажется нам затруднительным. В задачах такого рода можно применить обобщение теоремы Бореля, данное А. М. Эфросом ([7]) и известное в литературе как преобразование Эфроса.

Применим последнее с вспомогательной функцией

$$q(s) = \frac{s}{\sqrt{1 - \omega H(s)}} \quad (\arg \sqrt{1 - \omega H(s)} = 0 \text{ при } s > 0). \tag{7}$$

Преобразование Эфроса с последующей перестановкой порядка интегрирования по k и по τ приводит (6) к виду

$$I = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{(l_1)} \frac{\sqrt{a^2 q^2 + k^2}}{R(q)} e^{q\tau - z\sqrt{b^2 q^2 + k^2}} dq \right] k^3 J_0(kr)\, dk \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{A(s)}{1 - \omega H(s)} e^{st - \frac{s\tau}{\sqrt{1 - \omega H(s)}}} ds \right\} d\tau, \tag{8}$$

где $\overline{R}(q) = (b^2q^2 + 2k^2)^2 - 4k^2\sqrt{a^2q^2 + k^2}\sqrt{b^2q^2 + k^2}$, а контуры (l) и (l_1) выбраны так, чтобы выполнялось условие применимости преобразования Эфроса ([7]).

Интеграл во второй фигурной скобке в (8) является решением следующей одномерной задачи об источнике в среде с упругим последействием:

$$\frac{\partial^2 R(t,\tau)}{\partial\tau^2} - \omega\int_0^t h(t-t_1)\frac{\partial^2 R(t_1,\tau)}{\partial\tau^2}dt_1 = \frac{\partial^2 R(t,\tau)}{\partial t^2}, \tag{9}$$

$$R(t,\tau) = \frac{\partial R(t,\tau)}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0; \tag{10}$$

$$\left[R(t,\tau) - \omega\int_0^t h(t-t_1)R(t_1,\tau)dt_1\right]_{\tau=0} = a(t).$$

Таким образом, можно утверждать справедливость основной формулы, представляющей решение нашей задачи:

$$\overline{u}(r,\theta,z,t) = \int_0^\infty \overline{u}_0(r,\theta,z,\tau)R(t,\tau)d\tau, \tag{11}$$

где $R(t,\tau)$ — решение задачи (10), а $\overline{u}_0(r,\theta,z,\tau)$ — решение задачи Лемба для упругого полупространства при воздействии типа $\frac{\delta(r)}{r}\delta(\tau)$ на его границе или во внутренних точках ([6, 8]).

Формулу (11) можно представить в другом виде, если воспользоваться теоремой Бореля, а именно

$$\overline{u}(r,\theta,z,t) = \int_0^t a(t_1)\left[\int_0^\infty \overline{u}_0(r,\theta,0,\tau)R_0(t-t_1,\tau)d\tau\right]dt_1,$$

где $R_0(t,\tau)$ — решение задачи (10) при граничном значении $\delta(t)$.

4. Интегралу

$$R_0(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\frac{1}{1-\omega H(s)}e^{st-\frac{s\tau}{\sqrt{1-\omega H(s)}}}ds,$$

в силу условия в) на функцию $h(t)$ (см. выше), можно дать следующее представление в виде интеграла Фурье:

$$R_0(t,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda\tau}{\sqrt{\rho}}\sin\frac{\vartheta}{2}}\cos\left[\lambda\left(t - \frac{\tau}{\sqrt{\rho}}\cos\frac{\vartheta}{2}\right) - \vartheta\right]\frac{d\lambda}{\rho},$$

$$\rho e^{i\vartheta} = 1 - \omega H(i\lambda) = 1 - \omega(u - iv)$$

или приближенное выражение (в силу упомянутого условия $\omega|H(i\lambda)|<1$), допускающее простое физическое истолкование:

$$R_0(t,\tau) \approx \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda\tau\omega}{2}v}\cos\lambda\left(t - \tau - \frac{\omega\tau}{2}u\right)d\lambda.$$

Величины: $\exp\left[-\frac{\lambda\tau\omega}{2}v\right]$ — затухание и $\frac{\omega\tau}{2}u$ — дисперсия могут быть определены экспериментально. Это указывает на принципиальную возможность установить вид функции $h(t)$ при помощи соотношения

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty H(i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda,$$

полученного обращением интеграла для $H(s)$ из (7).

С другой стороны, можно предположить конкретный вид функции $h(t)$, сделать качественные заключения (на основании задачи (10) и формулы (11)) и сравнением с экспериментальными данными выбрать функции, удовлетворительно описывающие указанные выше свойства динамических процессов в реальных средах: затухание и дисперсию.

5. В случае среды с упругим последействием, описываемой двумя функциями $h_1(t)$ и $h_2(t)$ ([3]), решение может быть построено аналогичным методом; последующее изучение его при помощи преобразования Эфроса и асимптотических методов ([5]) позволяет дать приближенное описание поля возмущений нашей задачи, причем качественный результат о наличии затухания и дисперсии объемных волн сохраняется.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и более сложные граничные задачи, например, задача о распространении нестационарных возмущений в слоистых средах с плоско-параллельными границами раздела.

Решение строится в общем случае среды с упругим последействием (каждый слой характеризуется двумя функциями $h_1(t)$ и $h_2(t)$, упругими постоянными и плотностью), но исследование при помощи основной формулы (11) проходит только при ограничениях того же типа, что и в рассмотренной выше задаче.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
28 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Гоголадзе, Тр. Сейсмологич. инст., № 109 (1941). [2] Б. В. Дерягин, Журн. геофизики, № 1—2, 207 (1931). [3] L. Boltzmann, Pogg. Ann., Erg., 7, 624 (1876). [4] V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, 1913. [5] Г. И. Петрашень, Г. И Марчук, К. И. Огурцов, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., № 135, в. 21, 71 (1950). [6] К. И. Огурцов, Г. И. Петрашень, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., № 149, в. 24, 3 (1951). [7] А. М. Эфрос, А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, 1937. [8] Е. И. Шемякин, В. Л. Файншмидт, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., № 148, в. 28, 148 (1954).