Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

МАТЕМАТИКА

Действительный член АН АрмССР А. Л. ШАГИНЯН

О СКОРОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА КОНТИНУУМАХ

1. Пусть E — ограниченная замкнутая совокупность со связным дополнением на плоскости комплексного аргумента z; C — граница этой совокупности; E_∞ — дополнение относительно всей плоскости. Известно также, что E имеет диаметр $2d$ и помещается в круге K радиуса d, не заполняя его. Не ограничивая общности, будем считать начало координат помещенным в центре круга K.

Отобразим E_∞ конформно на $|w|>1$ функцией $w=\Phi(z)$, $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$. $G(z)=\lg|\Phi|(z)|$ есть функция Грина области E_∞. Пусть точка $A(z_1)\in E_\infty$ и $|z_1|<d$; $B(z_2)$ — произвольная точка области E_∞, причем $|z_2|=d+d_0$ и $d_0>0$ — произвольное число.

Доказываем неравенство

$$G(z_2)\exp\left[-2\int_{AB}\frac{ds}{\rho(s)}\right]\leqslant G(z_1)\leqslant G(z_2)\exp\left[2\int_{AB}\frac{ds}{\rho(s)}\right], \tag{1}$$

где AB — произвольная спрямляемая дуга, соединяющая точки A и B внутри E_∞; s — дуговое расстояние переменной на AB точки $z(s)$ от A; $\rho(s)$ — расстояние точки $z(s)$ от AB. Из (1) следует

$$G(z_1)\geqslant\frac{d_0}{2d}\exp\left[-2\int_{AB}\frac{ds}{\rho(s)}\right]. \tag{2}$$

Доказывается, что коэффициент 2 в показателе, вообще говоря, нельзя заменить числом меньше $\pi/2$ и, тем самым, оценку (2) нельзя значительно улучшить. Это доказывается путем построения совокупности E, пары точек $A(z_1)$ и $B(z_2)$, а также соединяющей их дуги AB такой, что неравенство (2) не имеет места при коэффициенте $\pi/2-\varepsilon$ в показателе.

2. Проведем в области E_∞ замкнутую спрямляемую кривую L, охватывающую совокупность E.

Теорема 1. *Во всех точках z кривой L*

$$G(z)\geqslant\frac{d_0}{2d}\exp\left[-\int_L\frac{ds}{\rho(s)}\right], \tag{3}$$

где $d+d_0=\max|z|$; $z\in L$.

В частности, если z_1 — фиксированная точка в E_∞ и $|z_1|>d$, то, согласно (3):

$$G(z_1)\geqslant\frac{d_0}{2d}\exp\left[-\inf_L\int\frac{ds}{\rho(s)}\right], \tag{4}$$

где нижняя грань берется по совокупности спрямленных замкну-

тых кривых L, проходящих через точку z_1 и охватывающих совокупность E.

В неравенствах (3) и (4) коэффициент единица при интеграле также нельзя заменить, вообще говоря, на $\pi/4 - \varepsilon$.

Если обозначить через w_1 образ точки z_1 при отображении $w = \Phi(z)$, то неравенство (3) эквивалентно следующему:

$$|w_1| \geqslant 1 + \frac{d_0}{2d} \exp\left[-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}\right]. \tag{5}$$

3. Произвольную жорданову дугу, которая, за исключением своих концов, лежит внутри E_∞, а концы лежат на границе C, будем называть, как это принято, сечением области E_∞. Обозначим через δ_1 нижнюю грань длин всевозможных сечений области E_∞, разделяющих точки z_1 и $z = \infty$. Пусть δ_2 — расстояние точки z_1 до E. Введем, следуя М. А. Лаврентьеву, величину $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$. Тогда известное в теории однолистных функций неравенство М. А. Лаврентьева (1) эквивалентно неравенству

$$|w_1| > 1 + e^{-c/\delta^3}$$

либо

$$G(z_1) > e^{-c'/\delta^3}, \tag{6}$$

где c, c' — постоянные, зависящие от d.

Оценка (6) следует из неравенств (2) — (4).

При E, более или менее точно охарактеризованных, неравенство (6) дает вообще более грубый результат, нежели, можно получить из (2) — (5) при удачном выборе контура L.

Оценку снизу для функции Грина можно получить и из известного второго неравенства Альфорса (2) либо из теорем Варшавского (3). Однако результаты указанных авторов получены ценой больших ограничений и для достаточно произвольных E применены быть не могут.

4. Приведенные в пунктах 1 — 3 оценки функции Грина дают возможность решить некоторые задачи об определении скорости полиномиальных приближений на произвольных совокупностях.

Пусть Ω — произвольная жорданова область, ограниченная спрямляемой кривой L; l — длина L.

Фиксируя внутри Ω произвольную замкнутую совокупность E, исследуем задачу оценки скорости полиномиальных приближений на E функций, регулярных внутри Ω и непрерывных вплоть до L. Обозначим через $2d$ диаметр совокупности E и через K — круг диаметра $2d$, покрывающий E. Пусть $2(d + d_0)$ есть диаметр круга, покрывающего Ω и концентричного K.

Теорема 2 (основная). *Если $f(z)$ регулярна внутри Ω и непрерывна вплоть до L, то при любом $n > 0$ существует полином степени $\leqslant n$ такой, что на E*

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant CM \exp\left\{-\alpha n \exp\left[-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}\right]\right\}, \tag{7}$$

где C — постоянная, определяемая конфигурацией $(\Omega; E)$:

$$C < 19 \cdot 10^3 \cdot \frac{d^8}{d_0^6} \frac{1}{\delta^2} \exp\left[7 \int_L \frac{ds}{\rho(s)}\right] < \exp\left[\beta \frac{l}{\delta}\right],$$

$\alpha = d_0/2d$; δ — *расстояние между E и L*; β — *постоянная, зависящая*

от d, d_0, δ; $M = \max |f(z)|$ на L; s — дуга, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки A на L.

Оценку (7) *в общем случае значительно улучшить нельзя, а именно: нельзя заменить коэффициент единица при интеграле на* $\pi/4 - \varepsilon$.

В частности, из (7) *следует более простая оценка*

$$|f(z) - P_n(z)| < CM \exp\left\{-\alpha n \exp\left[-\frac{l}{\delta}\right]\right\}. \qquad (8)$$

Приведенная теорема примыкает к известному результату Уолша ([4]), отличаясь от последнего тем, что здесь скорость полиномиального приближения аналитической на замкнутой совокупности E функции выражается непосредственно в терминах совокупности E и распределения особенностей функции.

Оценка, аналогичная (7), однако более грубая, имеется в заметке С. Н. Мергеляна ([5]).

5. Решается также задача об оценке весовых равномерных приближений на бесконечных совокупностях.

Пусть C — произвольная несамопересекающаяся кривая Жордана, обеими концами уходящая в бесконечность. Назовем r-порцией кривой C ее связную часть внутри $|z| \leqslant r$, содержащую некоторую фиксированную на C точку. Возьмем произвольную бесконечную область Ω, ограниченную счетным числом несамопересекающихся кривых указанного типа. Через L обозначим полную границу области Ω. Дополнительно потребуем, чтобы каждая r-порция границы имела ограниченную длину. Через L_r обозначим r-порцию границы L. Пусть E — произвольный континуум внутри Ω с единственной общей точкой с L в $z = \infty$. Допустим, что E содержит начало O. Обозначим через E_r связную часть E внутри $|z| \leqslant r$, содержащую точку O.

Теорема 3. *Если $f(z)$, $|f(z)| \leqslant M$, регулярна и ограничена внутри Ω и непрерывна вплоть до L, за исключением, может быть, точки $z = \infty$, то при любом $n > 0$ существует полином степени $\leqslant n$ такой, что на E*

$$\exp\left\{-\exp\left[\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}\right]^{\gamma}\right\} \cdot |f(z) - P_n(z)| < \exp\{-cn \exp[-(\lg n)^{1/\gamma}]\}, \qquad (9)$$

где $\gamma > 1$, а c — постоянная, зависящая от M. $\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}$ распространен на r-порцию границы L; $\rho(s)$ — расстояние переменной точки на L_r до E_r. Для каждого z в весовой функции фигурирует минимальное значение r, соответствующее E_r порциям, покрывающим z.

Показатель $1/\gamma$, вообще говоря, нельзя понизить.

Сектор математики и механики
Академии наук АрмССР

Поступило
31 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 5, 159 (1934). [2] L. Ahlfors, Acta Soc. Sci. Fenn., N. S., 1, 9 (1930). [3] S. E. Warschawski, Trans. Am. Math. Soc., 51, No. 2, 280 (1942). [4] J. L. Walsh, Akad. d. Wissenschaften München. Math.-Phys. Klasse, Sitzungsberichte, 223, 1926. [5] С. Н. Мергелян, ДАН, 91, № 6, 1271 (1953).