Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

А. М. ПОЛОСУЕВ

МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ НЕУЛУЧШАЕМЫХ ОЦЕНОК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 V 1955)

В работе ([1]) Н. М. Коробов показал, что для всякой как угодно медленно стремящейся к бесконечности функции $\varphi(p)$ при $p \to \infty$ и любого целого $m \neq 0$ можно построить такое α, что

$$\sum_{x=1}^{p} \exp 2\pi i m \alpha q^x = o(\varphi(p)),$$

где $q \geqslant 2$ — целое, и что ни для какого α эту оценку улучшить до $O(1)$ нельзя.

Используя метод Н. М. Коробова, мы получили обобщение этой теоремы на случай s показательных функций, что и составляет содержание настоящей статьи.

Лемма 1. *Пусть целые числа* p_ν, q_ν, a_ν, τ_ν, m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ *удовлетворяют условиям:*

1. $p_\nu > 1$; $q_\nu > 1$; $m_\nu \neq 0$; $(a_\nu, p_\nu) = 1$; $(p_\nu, q_\nu) = 1$; τ_ν *кратны показателям, которым принадлежат* q_ν *по* $\bmod p_\nu$.

2. *Хотя бы одно из сравнений*

$$m_\nu \tau_1 \ldots \tau_{\nu-1} \tau_{\nu+1} \ldots \tau_s p_1 \ldots p_{\nu-1} p_{\nu+1} \ldots p_s \equiv 0 \pmod{p_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

не имеет места.

Тогда при любом целом $N \geqslant -1$

$$S = \sum_{x=N+1}^{N+p_1 \ldots p_s \tau_1 \ldots \tau_s} \exp 2\pi i \sum_{\nu=1}^{s} \frac{m_\nu a_\nu q_\nu^x}{p_\nu (q_\nu^{\tau_\nu} - 1)} = 0, \quad s \geqslant 2. \tag{1}$$

Доказательство. Если в (1) положить $x = N + x_1 + x_2 \tau_1 \ldots \tau_s$, то

$$S = \sum_{x_1=1}^{\tau_1 \ldots \tau_s} \sum_{x_2=0}^{p_1 \ldots p_s - 1} \exp 2\pi i \sum_{\nu=1}^{s} \frac{m_\nu a_\nu q_\nu^{N+x_1+x_2\tau_1 \ldots \tau_s}}{p_\nu (q_\nu^{\tau_\nu} - 1)}. \tag{2}$$

Согласно определению τ_ν для всякого целого $k \geqslant 0$ $q_\nu^{\tau_\nu k} \equiv 1 \pmod{p_\nu}$. Суммируя по k от 0 до $x_2 \tau_1 \ldots \tau_{\nu-1} \tau_{\nu+1} \ldots \tau_s - 1$, получим

$$\frac{q_\nu^{x_2 \tau_1 \ldots \tau_s} - 1}{q_\nu^{\tau_\nu} - 1} \equiv x_2 \tau_1 \ldots \tau_{\nu-1} \tau_{\nu+1} \ldots \tau_s \pmod{p_\nu}$$

или

$$q_\nu^{x_2 \tau_1 \ldots \tau_s} \equiv 1 + (q_\nu^{\tau_\nu} - 1) x_2 \tau_1 \ldots \tau_{\nu-1} \tau_{\nu+1} \ldots \tau_s \pmod{(q_\nu^{\tau_\nu} - 1)}. \tag{3}$$

При помощи сравнения (3) сумму (2) можно представить в виде

$$S=\sum_{x_1=1}^{\tau_1\cdots\tau_s}\exp 2\pi i\sum_{\nu=1}^{s}\frac{m_\nu a_\nu q_\nu^{N+x_1}}{p_\nu(q_\nu^{\tau_\nu}-1)}\times$$

$$\times\sum_{x_2=0}^{p_1\cdots p_s-1}\exp 2\pi i\sum_{\nu=1}^{s}\frac{m_\nu a_\nu q_\nu^{N+x_1}\tau_1\cdots\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}\cdots\tau_s p_1\cdots p_{\nu-1}p_{\nu+1}\cdots p_s}{p_1\cdots p_s}x_2.$$

Вторая внутренняя сумма для всех значений x_1 равна 0, так как, в силу условий доказываемой леммы:

$$\sum_{\nu=1}^{s}m_\nu a_\nu q_\nu^{N+x_1}\tau_1\cdots\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}\cdots\tau_s p_1\cdots p_{\nu-1}p_{\nu+1}\cdots p_s\not\equiv 0\pmod{p_1\ldots p_s}.$$

Тем самым справедливость леммы 1 доказана.

Пусть теперь целые $p_{1l}>1$; $q_l\geqslant 2$; $(p_{1l},\ q_l)=1$; $l=1,2,\ldots,s$. Определим p_{il} рекуррентным соотношением

$$p_{(i+1)\,l}=p_{il}(q_l^{\tau_{il}}-1),\quad i=1,2,\ldots;\ l=1,2,\ldots,s,$$

где τ_{il} — числа, кратные показателям, которым принадлежат q_l по mod p_{il}. Будем выбирать τ_{il} таким образом, чтобы одновременно выполнялись следующие неравенства:

1. $\tau_{1l}<\tau_{2l}<\tau_{3l}<\ldots,\qquad l=1,2,\ldots,s.$

2. $q_l^{\tau_{(i-1)l}}-1>\prod_{j=1}^{\gamma}\tau_{ik_j}p_{ik_j}$,

где $i=2,3,4,\ldots;\ l=2,3,\ldots,s;\ \gamma=1,2,\ldots,l-1;\ k_j=j,j+1,\ldots$ $\ldots,l-\gamma+j-1;\ k_1<k_2<\ldots<k_\gamma$.

Будем полагать далее $n_0=0$, $n_1\geqslant 1$ целое и $n_{\nu+1}=n_\nu+p_{\nu1}\cdots$ $\ldots p_{\nu s}\tau_{\nu1}\ldots\tau_{\nu s}\psi(\nu)$, $\nu=1,2,\ldots$, где $\psi(\nu)$ — любая положительная монотонно возрастающая функция. При таких предположениях справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Если*

$$\alpha_l=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{p_{(\nu+1)\,l}q_l^{n_\nu}},\quad l=1,2,\ldots,s,$$

и целое p содержится в интервале $n_k\leqslant p<n_{k+1}$, то при любых одновременно не равных нулю целых $m_1,m_2,\ldots,m_s$ имеет место оценка

$$S_1=\sum_{x=1}^{p}\exp 2\pi i\sum_{l=1}^{s}m_l\alpha_l q_l^x=O(p_{k1}\cdots p_{ks}\tau_{k1}\cdots\tau_{ks}).\qquad(4)$$

Доказательство. Представим p в виде

$$p=n_k+rp_{k1}\cdots p_{ks}\tau_{k1}\cdots\tau_{ks}+r',$$

где $0\leqslant r<\psi(k)$, $0\leqslant r'<p_{k1}\cdots p_{ks}\tau_{k1}\cdots\tau_{ks}$.

Введем обозначения:

$$r_i = \begin{cases} \psi(i), & 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ r, & i = k; \end{cases} \tag{5}$$

$$S_i = \sum_{x=1}^{r_i p_{i1} \dots p_{is} \tau_{i1} \dots \tau_{is}} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} m_l \alpha_l q_l^{n_i + x}.$$

Разобьем сумму (4) на части:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{x=n_i+1}^{n_i+1} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} m_l \alpha_l q_l^x + \sum_{x=n_k+1}^{n_k+p_{k1} \dots p_{ks} \tau_{k1} \dots \tau_{ks}} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} m_l \alpha_l q_l^x +$$

$$+ O(p_{k1} \dots p_{ks} \tau_{k1} \dots \tau_{ks}),$$

или, используя введенные обозначения:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k} S_i + O(p_{k1} \dots p_{ks} \tau_{k1} \dots \tau_{ks}).$$

Как и в работе ([1]), легко показать, что

$$\alpha_l = \frac{a_{il}}{p_{(i+1)l} q_l^{n_i}} + O(m_{(i+2)l} q_l^{n_i+1}), \tag{6}$$

где a_{il} — целые числа и $(a_{il}, p_{il}) = 1$.

Подставляя в (5) вместо α_l правую часть (6), получим

$$S_i = \sum_{x=1}^{r_i p_{i1} \dots p_{is} \tau_{i1} \dots \tau_{is}} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} \frac{a_{il} m_l q_l^x}{p_{il} (q_l^{\tau_{il}} - 1)} + O(1). \tag{7}$$

Теперь покажем, что, начиная с $i > i_0(m_1, \dots, m_s)$,

$$\sum_{x=1}^{r_i \tau_{i1} \dots \tau_{is} p_{i1} \dots p_{is}} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} \frac{m_l a_{il} q_l^x}{p_{il} (q_l^{\tau_{il}} - 1)} = 0. \tag{8}$$

В самом деле, если из s целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$ только одно отлично от нуля, то справедливость (8) следует из леммы 1 работы ([1]); если же из них хотя бы два числа отличны от нуля, то справедливость равенства (8) следует из леммы 1 настоящей работы и способа построения τ_{il}.

Из (7) и (8) получаем, очевидно, утверждение леммы 2.

Пусть при $p \to \infty$ функция $\varphi(p)$ монотонно стремится к бесконечности; φ_1 — функция, обратная φ. Потребуем, чтобы рост n_ν определялся неравенством

$$n_\nu > \varphi_1(\nu p_{\nu 1} \dots p_{\nu s} \tau_{\nu 1} \dots \tau_{\nu s}). \tag{9}$$

Выберем α_l так же, как и в лемме 2. При таких предположениях имеет место следующая теорема:

Теорема. *Какова бы ни была как угодно медленно стремящаяся к бесконечности функция $\varphi(p)$ при $p \to \infty$, при любых одновременно не равных нулю целых $m_1 \dots m_s$ имеет место оценка*

$$\sum_{x=1}^{p} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} m_l \alpha_l q_l^x = o(\varphi(p)).$$

Ни для каких $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ эту оценку улучшить до $O(1)$ нельзя.

Доказательство. Выбирая k из условия $n_k \leqslant p < n_{k+1}$ и применяя лемму 2, получим оценку

$$\sum_{x=1}^{p} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} m_l \alpha_l q_l^x = O(p_{k1} \dots p_{ks} \tau_{k1} \dots \tau_{ks}).$$

Из неравенства (9) следует, что

$$p_{k1} \dots p_{ks} \tau_{k1} \dots \tau_{ks} < \frac{\varphi(n_k)}{k} = o(\varphi(p)).$$

Тем самым первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Предположим, что есть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ такие, что при любых целых $m_1, \dots, m_s$, одновременно не равных нулю,

$$\sum_{x=1}^{p} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} m_l \alpha_l q_l^x = O(1).$$

Если теперь положить в последнем равенстве $m_1 = 1$, $m_2 = \dots = m_s = 0$, то получим

$$\sum_{x=1}^{p} \exp 2\pi i \alpha_1 q_1^x = O(1),$$

что неверно вследствие теоремы работы (1).

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что система функций $\alpha_1 q_1^x, \dots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве, а следовательно, числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ совместно нормальные (о совместно нормальных числах см. (2)).

Московское высшее техническое училище
им. Баумана

Поступило
26 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, ДАН, 89, № 4 (1953). [2] Н. М. Коробов, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, № 5 (1955).