Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ПОВАРОВ

К ИЗУЧЕНИЮ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 9 IV 1955)

1. В предыдущих статьях ([1–3]) систематика и свойства симметрических булевых функций исследовались с точки зрения теории релейно-контактных схем. В настоящей заметке приводится ряд дальнейших результатов в этом направлении *.

2. Симметрическая булева функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с рабочими числами $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_l$ будет обозначаться символом $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема 1. *Булева функция*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n-m} S_i(x_1, \ldots, x_{n-m})\, S_{\alpha_{i1}\alpha_{i2}\ldots\alpha_{il_i}}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n),$$

где $0 \leqslant m \leqslant n$, *является симметрической тогда и только тогда, когда точки* (i, α_{ij}) *либо сплошь заполняют, либо сплошь не заполняют каждую идущую слева вниз направо диагональ точечной решетки из* $m+1$ *горизонтальных и* $n-m+1$ *вертикальных рядов* (*рис.* 1).

В самом деле, каждая такая диагональ есть геометрическое место точек, у которых сумма абсциссы и ординаты постоянна. Поэтому каждая диагональ соответствует одному из $n+1$ рабочих чисел, а каждая точка диагонали соответствует разложению рабочего числа на слагаемые, откуда и следует доказываемое.

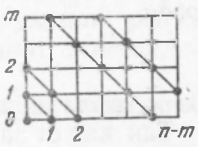


Рис. 1

Теорема 1 дает простой способ отыскивать рабочие числа коэффициентов разложения симметрической функции n переменных на элементарные симметрические функции по $n-m$ переменным. Чтобы получить эти числа, следует начертить точечную решетку из $m+1$ горизонтальных и $n-m+1$ вертикальных рядов и провести в ней диагонали для каждого рабочего числа разлагаемой функции. Тогда рабочие числа коэффициента разложения при $S_i(x_1, \ldots, x_{n-m})$ суть ординаты точек сечения диагоналей i-й вертикалью. Эту решетку мы назовем картой разложения симметрической функции, а точки (i, α_{ij}) — рабочими точками карты. Описанный способ может быть полезен при анализе и синтезе симметрических релейно-контактных схем.

С другой стороны, теорема 1 позволяет исследовать систематику симметрических булевых функций весьма простым и наглядным геометрическим методом. В частности, теорема 4 из ([1]) была получена автором как следствие настоящей теоремы 1.

---

* Из них результаты § 2 входят в диссертацию ([4]). Основные результаты из ([4]) опубликованы в ([3]).

3. Мы используем теорему 1 для подсчета числа ν_n типов симметрических функций n переменных и числа $\varkappa_n$ функций n переменных одного типа с симметрическими, где $n \geqslant 1$.

Как легко видеть, функция, однотипная с симметрической, получается из последней заменой некоторых аргументов их отрицаниями и условно может быть записана в виде $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, где $0 \leqslant m \leqslant n$. Рассмотрим отдельно случаи: 1) $m = n$; 2) $0 < m < n$.

В первом случае из симметрической функции снова получается симметрическая функция.

Теорема 2.

$$S_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = S_{n-\alpha_l,\, n-\alpha_{l-1}, \ldots, n-\alpha_1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Следствие. $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ расположены симметрически относительно числа $n/2$.

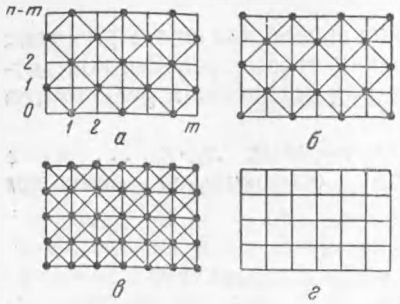


Рис. 2. a — $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$; $б$ — $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$; $в$ — 1; $г$ — 0

Для исследования второго случая построим карту разложения функции $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x_1, \ldots, x_n)$ по переменным $x_1, \ldots, x_m$. Замена $x_1, \ldots, x_m$ соответственно на $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ равносильна зеркальному отражению карты относительно левого края. Следовательно, функция $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ является симметрической тогда и только тогда, когда в карте разложения функции $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x_1, \ldots, x_n)$ по $x_1, \ldots, x_m$ каждая идущая слева вниз направо и каждая идущая слева вверх направо диагональ либо сплошь заполнены, либо сплошь не заполнены рабочими точками. Карт с такими диагоналями только четыре (рис. 2), откуда вытекает:

Теорема 3. *Собственная функция* $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, *где* $0 < m < n$, *является симметрической тогда и только тогда, когда*

$$S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n,$$

где $\tilde{x}_1$ *есть* x_1 *или* $\bar{x}_1$.

Так как от замены аргументов их отрицаниями функция $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ может перейти только в себя или в $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, то из теорем 2 и 3 вытекает

Теорема 4. $\nu_n = 2^n + 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} + 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - n - 1$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. $\varkappa_n = 2^{2n} - 2^{n+1} + 4$.

Теорема 4 определяет число физически различных симметрических контактных двухполюсников, а теорема 5 определяет число функций (условий проводимости), реализуемых при помощи конфигураций этих двухполюсников *.

* Симметрические функции n переменных с несимметрическим расположением рабочих чисел относительно $n/2$ можно называть моносимметрическими, функции 0, 1, $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ — полисимметрическими, а все остальные симметрические функции n переменных — бисимметри-

4. В заключение рассмотрим вопрос о соотношении между симметрическими и особенными функциями*.

Всякая особенная симметрическая функция является, очевидно, совершенно особенной и, следовательно, в силу теоремы 8 из (3), однотипна с некоторой монотонно убывающей симметрической функцией. Таким образом, рассматриваемый вопрос сводится к вопросу о соотношении между симметрическими и монотонно неубывающими функциями.

Теорема 6. *Кроме 0 и 1, единственными монотонно неубывающими симметрическими функциями n переменных являются n функций*

$$S_n(x_1, \ldots, x_n), S_{n-1,n}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, S_{1,2,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Следствие 1. Кроме 0 и 1, единственными особенными симметрическими функциями n переменных являются $2n$ функций

$$S_0(x_1,\ldots, x_n),\ S_{0,1}(x_1,\ldots, x_n),\ldots, S_{0,1,\ldots,n-1}(x_1,\ldots, x_n), S_n(x_1,\ldots, x_n),$$
$$S_{n-1,n}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, S_{1,2,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Следствие 2. Кроме 0 и 1, единственными особенными функциями одного типа с симметрическими функциями n переменных являются $2^{n+1} \cdot n$ функций

$$S_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m+1},\ldots, x_n), S_{n-1,n}(\bar{x}_1,\ldots, \bar{x}_m, x_{m+1},\ldots, x_n),\ldots$$
$$\ldots S_{1,2,\ldots,n}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Объединение теоремы 6 с теоремой 4 из (1) дает перечисление функций, входящих сразу в три класса: симметрических, функционально разделимых и особенных функций.

Теорема 7. *Единственными симметрическими функциями n переменных, функционально разделимыми и в то же время особенными, являются*

$$x_1x_2 \ldots x_n, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n, x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ и } \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n.$$

Интересный подкласс класса совершенно особенных функций составляют функции, реализуемые с независимыми контактами (3). Соотношение между этими последними и симметрическими функциями описывает следующая теорема.

Теорема 8. *Из симметрических собственных функций реализуются с независимыми контактами только функции, перечисленные в теореме 7.*

Обобщение теорем 7 и 8 на функции, однотипные с симметрическими, вполне очевидно.

Теоремы 6—8 дают обзор симметрических двухполюсников, которые можно построить с затратой либо только замыкающих, либо только размыкающих контактов для каждого приемного элемента.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
8 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Поваров, ДАН, 94, № 5, 801 (1954). [2] Г. Н. Поваров, ДАН, 94, № 6, 1075 (1954). [3] Г. Н. Поваров, ДАН, 100, № 5, 909 (1955). [4] Г. Н. Поваров, Исследование контактных схем с минимальным числом контактов, Диссертация, 1954.

ческими функциями. Число бисимметрических функций равно $2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} - 4 + 2\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right] - n\right)$. Мощность типа моносимметрической функции равна 2^n, бисимметрической 2^{n-1} и полисимметрической 1 или 2.

* Определение особенных функций см. в (3).