Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

МАТЕМАТИКА

В. В. ПЕТРОВ

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 VI 1955)

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с функциями распределения $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots$ и математическими ожиданиями, равными нулю. Будем считать, что случайные величины X_j имеют конечные абсолютные моменты третьего порядка

$$\beta_{3j} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF_j(x).$$

Введем обозначения

$$\sigma_j^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x), \qquad S_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2, \qquad A_{3n} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{3j}.$$

Согласно предельной теореме Ляпунова, при весьма общих условиях распределения $\bar{F}_n(x)$ нормированной суммы случайных величин $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{S_n}$ сходится при $n \to \infty$ к нормальной функции распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

А. М. Ляпуновым была поставлена задача об оценке быстроты сходимости $\bar{F}_n(x)$ к $\Phi(x)$. Ему же принадлежит первая по времени оценка отклонения $\bar{F}_n(x)$ от $\Phi(x)$. Позднее эта задача изучалась Крамером ([1,2]), Берри ([3]), Эссеном ([4]) и Бергстрёмом ([6]). В 1947 г. Ю. В. Линник ([5]) получил при более ограничительных условиях значительно более точные оценки для отклонения $\bar{F}_n(x)$ от $\Phi(x)$, чем ранее известные.

Целью настоящей работы является уточнение результатов Ю. В. Линника.

Предположим, что существуют такие абсолютные положительные постоянные g, G, γ и η, причем $0 < \gamma \leqslant 1$ и $\eta < 1$, и такие монотонные положительные функции $\psi_0(n)$, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(n)$, возрастающие до бесконечности при $n \to \infty$, для которых выполнены следующие три условия.

I. При всех n

$$S_n^2 \geqslant gn, \quad A_{3n} \leqslant Gn.$$

II.

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| > \sqrt{n}/\psi_1(n)} |x|^3 dF_j(x) \leqslant \frac{1}{\psi_2(n)}.$$

III.

$$\int\limits_{|x|\leqslant(1/\sqrt{n})^{\eta}} dF_j(x) \leqslant 1-\gamma \quad (j=1,2,\ldots,n),$$

причем из условия III допускаются исключения, но не более, чем для $n/\psi_0(n)$ индексов j из числа n индексов.

При этих условиях получена следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия* I — III *и если величины* X_j *имеют симметричные распределения* (*т. е.* $F_j(x) = 1 - F_j(-x)$, $j = 1, 2, \ldots$), *то при* $|x| \leqslant M$ *и любом конечном* M *имеем*

$$|\overline{F}_n(x)| - \Phi(x)| \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2}(1 + \varepsilon_n(M)), \tag{1}$$

где $C_0 = \max\{1, 1/2\sqrt{\gamma}\}$, *а* $\varepsilon_n(M)$ *стремится к нулю при* $n \to \infty$ *равномерно относительно всех допустимых условиями теоремы последовательностей случайных величин* X_j, *будучи зависимым только от* n, M *и выбора функций* $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$ *и* $\psi_2(n)$.

Верхняя граница для $|\overline{F}_n(x) - \Phi(x)|$, даваемая неравенством (1), достигается, что показывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть постоянную γ в условии III можно выбрать под условием $\gamma \geqslant 1/4$. Тогда $C_0 = 1$. Если все случайные величины X_j могут принимать только два значения -1 и $+1$, каждое с вероятностью $1/2$ (симметричная схема Бернулли), то, как известно ([4]), равномерно по x

$$\overline{F}_n(x) - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} Q_1\left(\frac{x\sqrt{n}}{2}\right) e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $Q_1(x) = [x] - x + 1/2$. В точках $x_{\nu n} = 2\nu/\sqrt{n}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), которые, очевидно, удовлетворяют условиям

$$x_{\nu+1,n} - x_{\nu n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$
$$x_{\nu n} \to \pm\infty \quad \text{при } \nu \to \pm\infty,$$

мы имеем

$$\overline{F}_n(x_{\nu n}) - \Phi(x_{\nu n}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-x_{\nu n}^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Пример 2. Пусть постоянную γ в условии III можно выбрать лишь под условием $\gamma < 1/4$. Тогда $C_0 = 1/2\sqrt{\gamma}$, $C_0 > 1$. Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, каждая из которых может принимать три значения -1, 0 и 1 с вероятностями, равными, соответственно, $\gamma/2$, $1-\gamma$ и $\gamma/2$. Все условия теоремы 1, очевидно, при этом будут выполнены. В силу одной теоремы Эссеена ([4]), для выбранной нами последовательности случайных величин с одним и тем же (решетчатым) распределением имеем

$$\overline{F}_n(x) - \Phi(x) = \frac{d}{\sigma\sqrt{2\pi n}} Q_1\left(\frac{x\sigma\sqrt{n}}{d}\right) e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь d — максимальный шаг распределения, σ^2 — дисперсия. Для рассматриваемого нами распределения $d = 1$, $\sigma^2 = \gamma$. В точках $x_{\nu n} = \nu/\sqrt{n\gamma}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), удовлетворяющих тем же условиям, что и последовательность точек в примере 1, имеем

$$\overline{F}_n(x_{\nu n}) - \Phi(x_{\nu n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{-x_{\nu n}^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Как показывает теорема 1 и приведенные примеры, условие малой вероятности малой окрестности нуля, предполагавшееся в ([5]), является несущественным.

При некотором дополнительном условии аналогичная теорема получена для несимметрично распределенных случайных величин.

Условие IV. Существует положительное число p такое, что

$$\int\limits_{x>0} dF_j(x) \geqslant p, \quad \int\limits_{x<0} dF_j(x) \geqslant p \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

причем допускаются исключения, но не более, чем для $n / \psi_0(n)$ индексов j.

Теорема 2. *Если выполнены условия* I—IV, *то при* $|x| \leqslant M$ *и любом конечном* M

$$|\overline{F}_n(x) - \Phi(x) - H_n(x)| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2}(1 + \varepsilon_n(M)), \qquad (2)$$

где

$$H_n(x) = \frac{1 - x^2}{6\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{S_n^3} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 \, dF_j(x),$$

C_1 — *положительная постоянная, определяемая из условия* $1 / C_1^2 = \min\{\gamma, p\}$, *а* $\varepsilon_n(M)$ *стремится к нулю при* $n \to \infty$ *равномерно относительно всех допустимых условиями теоремы последовательностей случайных величин.*

Оценка, даваемая неравенством (2), повидимому, не является точной, в отличие от оценки (1). В случае симметричной схемы Бернулли, для которой можно взять $p = 1/2$ и $\gamma = 1$, оценка (2) хуже соответствующей точной оценки (1) в $\sqrt{2}$ раз.

Для доказательства теорем 1 и 2 использован тот же метод, который был предложен в работе ([5]). В ряде мест этот метод, естественно, подвергся некоторым уточнениям.

В заключение выражаю глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР Ю. В. Линнику за неизменный интерес к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Gramér, Skand. Aktuarietidskrift, 11, 13 (1928). [2] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, 1947. [3] A. C. Berry, Trans. Am. Math. Soc., 49, 122 (1941). [4] C.-G. Esseen, Acta Math., 77, 1 (1945). [5] Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 111 (1947). [6] H. Bergström, Skand. Aktuarietidskrift, 32, 37 (1949).