Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ЛЯЩЕНКО

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 31 V 1955)

1. Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + \varphi(t) + f(t, x), \tag{1}$$

где x, $\varphi(t)$, $f(t, x)$ — n-мерные векторы; $A(t)$ — n-мерная матрица, определенные на всей вещественной оси t.

Предположим, далее, что:

а) матрица $A(t)$ удовлетворяет требованиям теоремы 2 ([1])*;

б) $\varphi(t)$ ограниченная и непрерывная функция t, $|\varphi(t)| \leqslant B$;

в) $f(t, x)$ есть непрерывная функция переменных t, x; кроме того,

$$f(t, 0) = 0, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leqslant |L|\,|x - y|,$$

где L — некоторая положительная постоянная.

При выполнении этих условий имеет место следующее предложение.

Теорема 1. *Если корни* $p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *характеристического уравнения*

$$\mathrm{Det}\,\|pE - A(t)\| = 0$$

таковы, что

$$\mathrm{Re}\,p_i(t) \leqslant -\gamma, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{2}$$

где γ *— некоторое положительное число, а постоянная Липшица* L *удовлетворяет условию*

$$L < \frac{\gamma(1-\sigma)}{4K} \tag{3}$$

с произвольной сколь угодно малой положительной постоянной σ *(*K *есть постоянная из теоремы 2 ([1])), то система (1) имеет единственное решение, асимптотически устойчивое по Ляпунову при* $t \to +\infty$.

Доказательство**. Вместо системы (1) рассмотрим соответствую-

---

* Формулу (6) работы ([1]) следует читать:

$$QT + R \leqslant \frac{\gamma}{4(\gamma + 2Ma^2)};$$

формулу (7) следует читать:

$$\delta \leqslant \frac{\gamma}{4a^2T}.$$

** Метод этого доказательства заимствован из ([2]), где он применяется для нахождения периодического решения устойчивой системы (1) с постоянной матрицей A и периодическими векторами $\varphi(t)$ и $f(t, x)$.

щее ей интегральное уравнение

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t, \tau)\,[\varphi(\tau) + f(\tau, x(\tau))]\,d\tau, \qquad (4)$$

где матрица $U(t, \tau)$ определяется уравнением

$$\frac{dU(t, \tau)}{dt} = A(t)\,U(t, \tau), \qquad U(t, \tau)\big|_{\tau=t} = E_n$$

и, следовательно, удовлетворяет оценке теоремы 2 ([1]).

Уравнение (4) решаем методом последовательных приближений, полагая

$$x^{(0)}(t) = 0,$$

$$x^{(m)}(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t, \tau)\,[\varphi(\tau) + f(\tau, x^{(m-1)}(\tau))]\,d\tau;$$

при этом все функции последовательности $\{x^{(m)}(t)\}$ удовлетворяют неравенству

$$|x^{(m)}(t)| \leqslant Q \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

где положительная постоянная Q определяется соотношением

$$\frac{4K}{\gamma}(LQ + B) \leqslant Q.$$

Последовательность $\{x^{(m)}(t)\}$ при $m \to \infty$ равномерно стремится к непрерывной и ограниченной функции $x(t)$, ибо ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} [x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)],$$

m-я частная сумма которого равна $x^{(m+1)}(t)$, мажорируется геометрической прогрессией

$$\frac{B}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^{m+1}}{\gamma^{m+1}} K^{m+1} L^{m+1},$$

сходящейся в силу условия (3).

Тривиальным образом убеждаемся, что предельная функция $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4), а значит, и системе (1).

Предположение о существовании другого решения системы (1) ведет к противоречию, чем доказывается единственность решения $x(t)$.

Остается показать, что найденное решение $x(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$. Для этого представим общее решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(t)\big|_{t=t_0} = x(t_0),$$

в следующем виде (для $t \geqslant t_0$):

$$x(t) = U(t, t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t, \tau)\,[\varphi(\tau) + f(\tau, x(\tau))]\,d\tau.$$

Пусть другое решение $y(t)$ системы (1), определяемое начальным условием

$$y(t)\big|_{t=t_0} = y(t_0),$$

есть (для $t \geqslant t_0$)

$$y(t) = U(t, t_0)\,y(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t, \tau)\,[\varphi(\tau) + f(\tau, y(\tau))]\,d\tau.$$

Отсюда имеем

$$|x(t)-y(t)| \leqslant |U(t,t_0)|\,|x(t_0)-y(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |U(t,\tau)|\,|f(\tau,x(\tau))-f(\tau,y(\tau))|\,d\tau$$

или

$$|x(t)-y(t)| \leqslant Ke^{-\frac{\gamma}{4}(t-\tau)}|x(t_0)-y(t_0)| + KL\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{\gamma}{4}(t-\tau)}|x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau.$$

Пользуясь леммой ([3], стр. 46), получаем окончательно

$$|x(t)-y(t)| \leqslant Ke^{\frac{\gamma}{4}t_0}|x(t_0)-y(t_0)|e^{-\frac{\gamma}{4}\sigma t},$$

и теорема доказана.

2. Кроме выполнения условий а), б), в), потребуем еще дополнительно, чтобы матрица $A(t)$ и векторы $\varphi(t)$ и $f(t,x)$ были непрерывными почти периодическими (п. п.) функциями переменной t, причем $f(t,x)$ была п. п. функцией переменной t равномерно относительно x с частотным базисом, не зависящим от x. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *система* (1) *имеет единственное п. п. решение, асимптотически устойчивое по Ляпунову при* $t \to +\infty$.

Для доказательства этой теоремы достаточно, очевидно, показать почти периодичность непрерывных функций равномерно сходящейся последовательности $\{x^{(m)}(t)\}$, полученной в теореме 1. Соответствующие оценки можно провести так же, как это сделано в ([4]).

Теорема 2 находит применение при изучении п. п. решений систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) + \varepsilon f(t,x), \tag{5}$$

где $A(t)$, $\varphi(t)$ и $f(t,x)$ суть п. п. функции переменной t, удовлетворяющие упоминавшимся выше условиям, а ε — некоторый малый параметр. В качестве следствия теоремы 2 имеет место

Теорема 3. *Если корни* $p_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *характеристического уравнения матрицы* $A(t)$ *удовлетворяют условию* (2), *то для всех значений параметра* ε,

$$|\varepsilon| < \frac{\gamma(1-\sigma)}{4KL},$$

система (6) *имеет единственное п. п. решение* $x(t,\varepsilon)$, *асимптотически устойчивое по Ляпунову при* $t \to +\infty$.

Частные случаи системы вида (5) изучались ранее ([5], [6]).

В заключение автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

Поступило
19 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Я. Лященко, ДАН, 96, № 2, 237 (1954). [2] A. B. Farnell, C. E. Langenhop, N. Levinson, J. of Math. and Phys., 29, No. 4, 300 (1951). [3] Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954. [4] Н. Я. Лященко, Укр. матем. журн., 7, в. 1, 47 (1955). [5] Г. И. Бирюк, ДАН, 96, № 1, 5 (1954). [6] И. Г. Малкин, Прикладн. матем. и мех., 18, в. 6, 681 (1954).