Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

*МАТЕМАТИКА*

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ЛАПЛАСА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

*(Представлено академиком М. В. Келдышем 9 VI 1955)*

1°. Пусть даны два степенных ряда с неотрицательными коэффициентами

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0), \tag{1}$$

сходящиеся при $|x|<1$ ($x$ — вещественный аргумент). Обозначим

$$s_n \sim \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad \sigma_n=\sum_{i=0}^{n} b_i \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{2}$$

Очень просто доказывается, что из соотношения

$$s_n \sim \sigma_n \quad (n \to \infty) \tag{3}$$

следует

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to 1-0)\ *. \tag{4}$$

Обратная задача, т. е. отыскание условий, при которых из (4) следует (3), значительно сложнее. Относящиеся сюда результаты ([2],[3]) получены в предположении, что одна из функций (1) (например $g(x)$) имеет весьма специальный вид; так, в наиболее общей теореме Карамата ([3]) требуется «регулярность» роста $g(x)$, а следовательно ** и $\sigma_n$, т. е. существование такой константы $\gamma \geqslant 0$, что для каждого $p>0$

$$\sigma_{[pn]} \sim p^{\gamma}\sigma_n \quad (n \to \infty).$$

В настоящей заметке устанавливается теорема, охватывающая значительно более широкий класс рядов $g(x)$. Доказывается также, что этот результат переносится на интегралы Лапласа — Стилтьеса.

Заметим, что результаты этой статьи могли бы быть получены как специальный случай несколько усиленного варианта одной общей тауберовой теоремы для отношения функций ([4]). Однако здесь будет дано прямое доказательство, сходное по идее с известным методом Карамата и использующее теорему аппроксимации Вейерштрасса.

2°. Теорема 1. *Если коэффициенты ряда $g(x)$ удовлетворяют условию*

$$\lim \frac{\sigma_m}{\sigma_n}=1 \quad \left(n \to \infty,\ 1<\frac{m}{n} \to 1\right), \tag{5}$$

*то из* (4) *следует* (3).

* См., например, ([1]), стр. 254.
** Это вытекает из результатов Карамата.

Отметим как частный случай условия (5) следующий критерий, обеспечивающий применимость этой теоремы:

$$b_n = O\left(\frac{\sigma_n}{n}\right).$$

В частности, это соотношение выполняется при $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Теорема 2. *Пусть*

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t/x} ds(t), \quad G(x) = \int_0^\infty e^{-t/x} d\sigma(t), \tag{6}$$

*где* $s(t)$, $\sigma(t)$ — *неубывающие функции* ($s(0) = \sigma(0) = 0$), *причем оба интеграла сходятся при* $0 < x < \infty$. *Пусть выполняется условие*

$$\lim \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} = 1 \quad \left(x \to \infty,\ 1 < \frac{y}{x} \to 1\right). \tag{5'}$$

*Тогда из* $F(x) \sim G(x)$ $(x \to \infty)$ *следует* $s(x) \sim \sigma(x)$ $(x \to \infty)$.

Очевидно, теорема 1 получается из теоремы 2, если положить в последней $s(t) = s_{[t]}$, $\sigma(t) = \sigma_{[t]}$ и $e^{-1/x}$ принять за новый аргумент.

3°. Будем предполагать, что $\sigma(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$, так как в противном случае теорема 2 очевидна. Установим ряд лемм.

Лемма 1. *Условие* (5') *эквивалентно следующему: каково бы ни было* $A > 1$, *существуют константы* $\gamma > 0$, $N \geqslant 0$ (*зависящие от* $A$) *такие, что*

$$\frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \leqslant A\left(\frac{y}{x}\right)^\gamma \quad (y > x > N). \tag{7}$$

Доказательство этой леммы совершенно элементарно и основано на том, что условие (5') может быть записано следующим образом:

$$\lim_{p \to 1+0} \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\sigma(px)}{\sigma(x)} = 1.$$

Лемма 2. *В условиях теоремы* 2 *имеем при* $x \to \infty$: 1) $\sigma(cx) \asymp \sigma(x)$ $(c > 0)$ *; 2) $\varphi(x) = \int_0^x \sigma(t)\,dt \asymp x\sigma(x)$; 3) $G(x) \asymp \sigma(x)$; 4) $s(s) = O[\sigma(x)]$.

Доказательство. 1) Следует непосредственно из (7) и монотонности функции $\sigma(x)$.

2) Имеем

$$\frac{x}{2}\,\sigma\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \int_{x/2}^x \sigma(t)\,dt \leqslant \varphi(x) \leqslant x\sigma(x),$$

что на основании п. 1) и доказывает требуемое.

3) Имеем

$$\sigma(x) \leqslant \int_0^x e^{(x-t)/x} d\sigma(t) \leqslant e\int_0^\infty e^{-t/x} d\sigma(t) = eG(x). \tag{8}$$

С другой стороны, пользуясь (7), находим (при $x > N$)

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t/x}\sigma(t)\,dt \leqslant \sigma(x) + \frac{\sigma(x)}{x}\int_x^\infty e^{-t/x}\frac{\sigma(t)}{\sigma(x)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sigma(x)\left[1 + \frac{A}{x}\int_x^\infty e^{-t/x}\left(\frac{t}{x}\right)^\gamma dt\right] = \sigma(x)\left[1 + A\int_1^\infty t^\gamma e^{-t}\,dt\right]. \tag{9}$$

* Символ $\asymp$ означает, что отношение соответствующих функций при больших $x$ заключено между двумя положительными постоянными.

Сопоставляя (8) и (9), получаем $G(x) \asymp \sigma(x)$.

4) Так же, как (8), доказывается $s(x) \leqslant eF(x)$. Поэтому, на основании п. 3) и соотношения $F(x) \sim G(x)$, имеем при $x \to \infty$

$$\frac{s(x)}{\sigma(x)} \asymp \frac{s(x)}{G(x)} = O\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right] = O(1).$$

Лемма 3. *Пусть $s(x)$, $\sigma(x)$ — неубывающие положительные функции, причем $\sigma(x)$ удовлетворяет условию (5′). Тогда из* $\int_0^x s(t)\,dt \sim$ $\sim \int_0^x \sigma(t)\,dt$ $(x \to \infty)$ *следует* $s(x) \sim \sigma(x)$ $(x \to \infty)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $a > 1$. Для достаточно больших $x$ будем иметь

$$(1-\varepsilon)\int_0^x \sigma(t)\,dt \leqslant \int_0^x s(t)\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\int_0^x \sigma(t)\,dt,$$

$$(1-\varepsilon)\int_0^{ax} \sigma(t)\,dt \leqslant \int_0^{ax} s(t)\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\int_0^{ax} \sigma(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\int_x^{ax} \sigma(t)\,dt - \varepsilon\left(\int_0^x + \int_0^{ax}\right)\sigma(t)\,dt \leqslant \int_0^{ax} s(t)\,dt \leqslant \int_x^{ax} \sigma(t)\,dt + \varepsilon\left(\int_0^x + \int_0^{ax}\right)\sigma(t)\,dt.$$

Пользуясь леммой 1, находим при $x > N$:

$$(a-1)\,xs(x) \leqslant (a-1)\,x \cdot Aa^{\gamma}\sigma(x) + 2\varepsilon ax \cdot Aa^{\gamma}\sigma(x);$$

$$(a-1)\,x\sigma(ax)\cdot A^{-1}a^{-\gamma} - 2\varepsilon ax\sigma(ax) \leqslant (a-1)\,xs(ax).$$

Устремляя $x$ к $\infty$ и замечая, что $\varepsilon$ при этом может быть сделано сколь угодно малым (при фиксированных $a$, $A$ и $\gamma$), получим $\overline{\lim}\frac{s(x)}{\sigma(x)} \leqslant Aa^{\gamma}$, $\underline{\lim}\frac{s(ax)}{\sigma(ax)} = \underline{\lim}\frac{s(x)}{\sigma(x)} \geqslant A^{-1}a^{-\gamma}$. Переходя к пределу сначала при $a \to 1+0$, а затем при $A \to 1+0$, получаем $\lim\frac{s(x)}{\sigma(x)} = 1$.

Лемма 4. *Всякую ограниченную измеримую функцию $\chi(x)$ $(0<x<1)$ можно аппроксимировать некоторым многочленом $P(x)$ так, что*

$$\int_0^1 (A\,|\ln x|^{\gamma} + 1)\,|\chi(x) - P(x)|\,dx < \varepsilon, \tag{10}$$

*где $\varepsilon$ — произвольное положительное число, а $A$ и $\gamma$ — фиксированные неотрицательные константы.*

Лемма легко доказывается при помощи теоремы аппроксимации Вейерштрасса.

4°. Переходим к доказательству теоремы 2. Введем функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \left(0 < x \leqslant \frac{1}{e}\right), \\ \frac{1}{x} & \left(\frac{1}{e} < x < \infty\right). \end{cases} \tag{11}$$

Согласно лемме 4 существует многочлен $P(x)=\sum_{n=0}^{N} c_n x^n$, удовлетворяющий неравенству (10), где $\chi(x)$ — функция (11), а $A$ и $\gamma$ — некоторые константы, для которых справедливо (7). Производя в (10) подстановку $x=e^{-t}$, получим

$$\int_0^\infty (1+At^\gamma)\cdot|e^{-t}\chi(e^{-t})-e^{-t}P(e^{-t})|\,dt<\varepsilon. \tag{12}$$

Так как $e^{-t}\chi(e^{-t})$ есть характеристическая функция интервала (0, 1), можно написать

$$\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x [s(t)-\sigma(t)]\,dt=\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^\infty e^{-t/x}\chi(e^{-t/x})[s(t)-\sigma(t)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^\infty e^{-t/x}P(e^{-t/x})[s(t)-\sigma(t)]\,dt+\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^\infty r\left(\frac{t}{x}\right)[s(t)-\sigma(t)]\,dt, \tag{13}$$

где $r(t)=e^{-t}\chi(t)-e^{-t}P(e^{-t})$. Первое слагаемое в правой части (13) стремится к нулю при $x\to\infty$, так как на основании леммы 2 и соотношения $F(x)\sim G(x)$ имеем

$$\sum_{n=0}^{N} c_n\int_0^\infty e^{-(n+1)t/x}[s(t)-\sigma(t)]\,dt=x\sum_{n=0}^{N}\frac{c_n}{n+1}\int_0^\infty e^{-(n+1)t/x}d\{s(t)-\sigma(t)\}=$$

$$=x\sum_{n=0}^{N}\frac{c_n}{n+1}\left[F\left(\frac{x}{n+1}\right)-G\left(\frac{x}{n+1}\right)\right]=o\left[x\sum_{n=0}^{N}G\left(\frac{x}{n+1}\right)\right]=$$

$$=o[xG(x)]=o[\varphi(x)].$$

Для оценки второго интеграла заметим, что на основании п. 4) леммы 2 для больших $x$ $s(x)\leqslant M\sigma(x)$, где $M$ — константа. Пользуясь (7) и (12), находим для больших $x$

$$\left|\int_0^\infty r\left(\frac{t}{x}\right)[s(t)-\sigma(t)]\,dt\right|\leqslant\int_0^x\left|r\left(\frac{t}{x}\right)\right|\cdot|s(t)-\sigma(t)|\,dt+$$

$$+\sigma(x)\int_x^\infty\left|r\left(\frac{t}{x}\right)\right|\cdot\left|\frac{\sigma(t)}{\sigma(x)}\right|\cdot\left|\frac{s(t)}{\sigma(t)}-1\right|dt\leqslant(M+1)x\sigma(x)\int_0^1|r(t)|\,dt+$$

$$+(M+1)x\sigma(x)\int_1^\infty|r(t)|\cdot At^\gamma dt\leqslant x\sigma(x)\cdot(M+1)\varepsilon=\varepsilon O[\varphi(x)].$$

Следовательно, $\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x[s(t)-\sigma(t)]\,dt\right|\leqslant\varepsilon\cdot O(1)$. Так как $\varepsilon$ произвольно, то $\int_0^x s(t)\,dt\sim\int_0^x\sigma(t)\,dt$ $(x\to\infty)$. Применяя лемму 3, мы приходим к соотношению $s(t)\sim\sigma(x)$ $(x\to\infty)$. Теорема доказана.

Киевский инженерно-строительный институт

Поступило 9 VI 1955

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Титчмарш, Теория функций, М.—Л., 1951. [2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc., (2) **13**, 174 (1914). [3] J. Karamata, J. f. d. reine u. angew. Math., **164**, № 1, 27 (1931). [4] Б. И. Коренблюм, ДАН, **88**, № 4, 745 (1953).