Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Н. ИВАНОВА

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ГАУССОВСКОГО ТИПА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VI 1955)

Сходимость последовательности квадратурных формул гауссовского типа на конечном отрезке для всякой непрерывной функции была доказана еще Стилтьесом (1). Даже в случае общих формул механических квадратур на конечном отрезке мы имеем, благодаря работам В. А. Стеклова (2) и Г. Полиа (3), необходимые и достаточные условия сходимости последовательности их.

Вопрос о сходимости последовательности квадратурных формул на бесконечных интервалах представляет значительные трудности. Известные здесь результаты Успенского (4), Шохата и Тамаркина (5) не имеют столь общего характера, как в случае конечного отрезка.

Сходимость последовательности квадратурных формул Гаусса с весом $\psi(x)$ на бесконечных интервалах оказывается тесным образом связанной с вопросами определенности соответствующей проблемы моментов для веса $\psi(x)$ и взвешенного приближения непрерывных функций на соответствующем интервале многочленами.

В работах Успенского, Шохата и Тамаркина мы находим связь сходимости последовательности квадратурных формул с определенностью соответствующей проблемы моментов. В настоящей заметке рассматривается другой метод, основанный на взвешенном приближении непрерывных функций многочленами.

Рассматривается последовательность квадратурных формул гауссовского типа на полуоси:

$$\int_0^\infty f(x)\,\frac{1}{\varphi(x)}\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} M_i^n f(x_{i,n}), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — фиксированная положительная функция.

Исследуются условия, которым должен удовлетворять вес квадратурных формул Гаусса, для того, чтобы имела место сходимость последовательности их для всякой непрерывной функции на полуоси, подчиненной только некоторым условиям, наложенным на рост их на бесконечности.

Теорема 1. *Если $\varphi(x)$ — нормально возрастающая весовая в смысле С. Н. Бернштейна на полуоси функция и*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{\ln^2 x} = \infty, \tag{2}$$

то последовательность квадратурных формул Гаусса на полуоси с весом $1/\varphi(x)$ сходится для всякой непрерывной функции, для которой

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(\lambda x)} = 0 \tag{3}$$

(для некоторого положительного $\lambda < 1$).

Доказательство. Будем рассматривать значения $\int_0^\infty f(x)\,\frac{dx}{\varphi(x)}$ и $\sum_{i=1}^{n} M_i f(x_{i,n})$ как значения функционалов F и F_n на функции $f(x)$ из пространства $C_{\varphi(\lambda x)}$ непрерывных на полуоси функций с нормой

$$\| f \| = \max_{0 \leqslant x < \infty} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)}.$$

Сходимость последовательности квадратурных формул означает с этой точки зрения слабую сходимость последовательности функционалов F_n к функционалу F.

Так как $\varphi(x)$, по предположению теоремы, весовая в смысле С. Н. Бернштейна функция на полуоси, то множество многочленов всюду плотно на множестве непрерывных функций, для которых выполняется условие (3) в смысле метрики $C_{\varphi(\lambda x)}$.

На множестве многочленов последовательность квадратурных формул сходится. Поэтому нам достаточно доказать, что F — ограниченный функционал и $\| F_n \|$ ограничены в совокупности. Но

$$|F[f]| = \left| \int_0^\infty f(x) \frac{1}{\varphi(x)}\, dx \right| \leqslant \| f \| \int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)}\, dx,$$

$$|F_n[f]| = \left| \sum_{i=1}^{n} M_i^n f(\lambda x_{i,n}) \right| \leqslant \| f \| \sum_{i=1}^{n} M_i^n \varphi(\lambda x_{i,n}),$$

и дело сводится к оценке $\int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)}\, dx$ и $\sum_{i=1}^{n} M_i^n \varphi(\lambda x_{i,n})$.

В. С. Виденский ([8]) доказал, что для всякой четной нормально возрастающей функции $\Phi(x)$ можно построить такую целую четную функцию

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \quad (a_0 > 0,\ a_{2n} \geqslant 0),$$

что для всех достаточно больших значений x выполняются неравенства

$$\frac{1 - q^2}{x^2 q^2} F(qx) < F(x) < F(x) \tag{4}$$

(для $x \geqslant x_0 \geqslant 1$ и $qx \geqslant x_0$), причем q можно выбрать любым < 1.

Взяв $\lambda < q < 1$, будем иметь неравенства (4) для $x \geqslant X$. Тогда, пользуясь теоремой Стилтьеса ([6]), будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^n \varphi(\lambda x_{i,n}) < \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} \lambda^{2m} c_{2m} + c_0 \varphi(\lambda X) \leqslant \int_0^\infty \frac{F(\lambda x)}{\varphi(x)}\, dx + c_0 \varphi(\lambda X) <$$

$$< c_0 \varphi(\lambda X) + \int_0^X \frac{F(\lambda x)}{\varphi(x)}\, dx + \frac{q^2}{1 - q^2} \int_X^\infty \frac{F(\lambda x)}{F(qx)}\, x^2 dx;$$

здесь $c_k = \int_0^\infty x^k \frac{1}{\varphi(x)}\, dx$.

Интегралы $\int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)}\, dx$ и $\int_0^\infty \frac{F(\lambda x)}{F(qx)}\, x^2 dx$ сходятся вследствие логарифмической выпуклости функций $\varphi(x)$ и $F(x)$ и условий (2) и (3), а это обеспечивает ограниченность функционала F и совокупную ограниченность $\| F_n \|$.

Столь же элементарным способом может быть доказано следующее предложение:

Если $\varphi(x)$ — целая функция с неотрицательными коэффициентами и проблема моментов для последовательности $\{c_k\}$ (где $c_k = \int_0^\infty x^k \frac{1}{\varphi(x)}\,dx$) на полуоси определена, то последовательность квадратурных формул (1) *сходится для всякой непрерывной функции $f(x)$, для которой*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\,x^2}{\varphi(x)} = 0. \tag{5}$$

В то же время это предложение может быть получено как следствие общих результатов Шохата и Тамаркина ([5]).

Если $\varphi(x)$ — целая с неотрицательными коэффициентами весовая в смысле С. Н. Бернштейна на полуоси функция, то проблема моментов для последовательности $\{c_k\}$ определена, и, следовательно, имеется сходимость последовательности квадратурных формул (1) для всякой непрерывной функции, для которой выполняется условие (5).

Предложения, аналогичные этим двум, имеют место и в случае всей оси при дополнительном предположении четности $\varphi(x)$.

Метод взвешенного приближения непрерывных функций многочленами позволяет установить некоторые критерии сходимости последовательности квадратурных формул также для некоторых операторов, заданных интегральным преобразованием.

Вопросы сходимости такого рода возникают, например, если находить приближенное решение дифференциальных уравнений, точное решение которых дается в интегральной форме по соответствующим квадратурным формулам.

Пусть A и A_n — операторы, переводящие функцию $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ в функции $F(\alpha)$ и $F_n(\alpha)$, соответственно, по формулам:

$$F(\alpha) = \int_0^\infty f(x+\alpha)\frac{1}{\varphi(x)}\,dx, \quad F_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i^n f(x_{i,n}+\alpha),$$

где $F_n(\alpha)$ есть значение $F(\alpha)$, вычисленное по квадратурной формуле Гаусса с весом $1/\varphi(x)$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$ — четная нормально возрастающая весовая в смысле С. Н. Бернштейна на действительной оси функция и* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{\ln^2 x} = \infty$.

Тогда, если $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(\lambda x)} = 0$ *(где $\lambda < 1/2$), то $F_n(\alpha)$ стремится к $F(\alpha)$ при $n\to\infty$ в смысле метрики пространства $C_{\varphi(2\lambda\alpha)}$ (т. е. равномерно на любой конечной части оси).*

Доказательство.

$$|F(\alpha)| < \|f\|_{C_{\varphi(\lambda x)}} \varphi(2\lambda\alpha)\left(\int_0^\infty \frac{1}{\varphi(x)}\,dx + \frac{1}{\varphi(0)}\int_0^\infty \frac{\varphi(2\lambda x)}{\varphi(x)}\,dx\right);$$

$$|F_n(\alpha)| < \|f\|_{C_{\varphi(\lambda x)}} \varphi(2\lambda\alpha)\left(\int_0^\infty \frac{1}{\varphi(x)}\,dx + \frac{1}{\varphi(0)}\sum_{i=1}^{n} M_i^n \varphi(2\lambda x_{i,n})\right).$$

Совершенно так же, как и в предыдущей теореме, убеждаемся в том, что $\int_0^\infty \frac{\varphi(2\lambda x)}{\varphi(x)}\,dx$ сходится и $\sum_{i=1}^{n} M_i^n \varphi(2\lambda x_{i,n})$ ограничены в совокупности, так что $\|F(\alpha)\|_{C_{\varphi(2\lambda\alpha)}} \leqslant k_1 \|f\|_{C_{\varphi(\lambda x)}}$; $\|F_n(\alpha)\|_{C_{\varphi(2\lambda\alpha)}} \leqslant k_2 \|f\|_{C_{\varphi(\lambda x)}}$.

Так как $\varphi(x)$ весовая на оси функция, то для всякого $\varepsilon > 0$ и любой непрерывной функции $f(x)$, для которой $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(\lambda x)} = 0$, найдется полином $P(x, \varepsilon)$ достаточно высокой степени такой, что $\|f - P\|_{C_{\varphi(\lambda x)}} < \varepsilon$.

Взяв n_0 так большим, чтобы $A_n P(x, \varepsilon) = AP(x, \varepsilon)$, для $n \geqslant n_0$ будем иметь: $\|F(\alpha) - F_n(\alpha)\| \leqslant \|A(f - P)\| + \|A_n(f - P)\| \leqslant (k_1 + k_2)\varepsilon$.

Пусть теперь B и B_n — операторы, переводящие $f(x)$ в функции $F^1(\alpha)$ и $F_n^1(\alpha)$ по формулам:

$$F^1(\alpha) = \int_0^\infty f(x) \frac{1}{\varphi(\alpha x)}\, dx, \quad F_n^1(\alpha) = \sum_{l=1}^{n} M_l^n(\alpha) f(x_{l,n}(\alpha)),$$

где $M_l^n(\alpha)$ и $x_{l,n}(\alpha)$ — коэффициенты и узлы квадратурной формулы Гаусса с весом $1/\varphi(\alpha x)$, точной для многочленов степени $\leqslant 2n - 1$.

Теорема 3. *Если $\varphi(x)$ — четная нормально возрастающая весовая в смысле С. Н. Бернштейна на полуоси функция и* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{\ln^2 x} = \infty$, *то для всякой непрерывной функции, для которой* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(\sigma x)} = 0$, $F_n^1(\alpha)$ *равномерно стремится к $F(\alpha)$ для всякой полупрямой* $(\alpha \geqslant \sigma_0 > \sigma)$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 2.

Следствием теорем 2 и 3 является, например, сходимость последовательности квадратурных формул для преобразования Пуассона

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha)\, e^{-\alpha^2/4t}\, d\alpha,$$

равномерная по t для $t \geqslant t_0 > 0$ и по x в любой конечной части плоскости, а также сходимость последовательности квадратурных формул для преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx,$$

равномерная по p для $p \geqslant p_0 > \sigma$, если $f(x)\, e^{-\sigma x} \to 0$ при $x \to \infty$.

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
25 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. J. Stieltjes, Ann. d. l'Ec. Norm., **1**, 409 (1884). [2] В. А. Стеклов, Изв. Императорск. Акад. наук, **10**, сер. VI, 169 и 829 (1916). [3] G. Polya, Math. Zs., **37**, 264 (1933). [4] J. K. Uspensky, TAMS, **30**, 542 (1928). [5] J. A. Shohat, J. D. Tamarkin, The Problem of Moments, N. Y., 1943. [6] Т. И. Стилтьес, Исследование по теории непрерывных дробей, Харьков — Киев, 1936. [7] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., **1**, 25, 1952. [8] В. С. Виденский, ДАН, **92**, № 2 (1953).