Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. Г. БОРИСОВИЧ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ЧЕТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 VI 1955)

Теория категорий Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана (1) позволила дать оценку числа критических точек четных функционалов на сферах. Основной результат Л. А. Люстерника (2) обобщался рядом авторов. В частности, В. И. Соболев (3), а затем Э. С. Цитланадзе (4) доказали теоремы о существовании бесконечного числа критических значений четных функционалов на сфере банахова пространства. Методы, применявшиеся в указанных работах, существенно использовали четность функционала, так как это свойство позволяло переходить к изучению функционалов на проективных пространствах.

В ряде работ М. А. Красносельского был предложен метод, не использующий перехода к проективным пространствам. Это позволило получить ряд теорем, дающих оценку числа критических точек для функционалов, не обладающих свойством четности. В частности, он указал новый класс критических значений четных функционалов, обладающих свойством устойчивости при малых не обязательно четных возмущениях (5), причем рассматривались функционалы в гильбертовом пространстве.

В настоящей статье указывается обобщение теоремы М. А. Красносельского на случай функционалов на сферах банаховых пространств. Указывается класс устойчивых критических значений для функционалов на гиперболоидах. Самостоятельное значение имеет, как нам кажется, использованный при доказательстве теорем 1 и 3 оператор (4) — при его помощи доказательства многих известных предложений о функционалах на поверхностях в банаховом пространстве получаются непосредственно. В конце статьи дается определение рода множества, обобщающее соответствующее понятие М. А. Красносельского (6), и указываются некоторые его свойства.

1. Через $\mathcal{E}$ обозначается регулярное банахово пространство со счетным базисом, в котором некоторая степень α нормы равномерно дифференцируема. Предполагается, что оператор L градиент степени нормы и обратный к нему L^{-1} непрерывны и ограничены. В пространстве $\mathcal{E}$ рассматриваются слабо непрерывные равномерно дифференцируемые в единичном шаре T функционалы $F(\varphi)$.

Говорят, что φ_0 — критическая точка функционала $F(\varphi)$ на единичной сфере, если

$$\operatorname{grad} F(\varphi_0) = \lambda \operatorname{grad} \| \varphi_0 \|^{\alpha}. \qquad (1)$$

Значения функционала в критических точках называются критическими значениями.

Теорема 1. *Пусть функционал* $F(\varphi)$ $(F(0) = 0)$ *четен, причем* $F(\varphi) > 0$ *и* $\| \operatorname{grad} F(\varphi) \| > 0$ *при* $\| \varphi \| > 0$. *Тогда для каждого натурального* N *можно указать такое* $\delta > 0$, *что любой функционал*

$F(\varphi)+G(\varphi)$ на единичной сфере имеет не меньше чем N критических точек, если только

$$\sup_{\|\varphi\|\leqslant 1}|G(\varphi)|+\sup_{\|\varphi\|\leqslant 1}\|\operatorname{grad}G(\varphi)\|<\delta.$$

Эту теорему можно рассматривать как утверждение, дающее оценку снизу числа нормированных решений уравнения вида (1). В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_0^1\dots\int_0^1(K_n(x,y_1,\dots,y_n)+L_n(x,y_1,\dots,y_n))\times$$
$$\times\varphi(y_1)\dots\varphi(y_n)\,dy_1\dots dy_n=\lambda|\varphi(x)|^{p/q}\operatorname{sign}\varphi(x),\qquad(2)$$

где K_n и L_n — непрерывные функции, симметричные относительно всех переменных; их максимумы обозначим, соответственно, через k_n и l_n. Оператор, определенный правой частью уравнения (2), является градиентом равномерно дифференцируемого в единичном шаре пространства L_p $(p>1)$ слабо непрерывного функционала Лихтенштейна ([7]) (для случая гильбертова пространства см. ([8])), если $\Sigma n(k_n+l_n)<\infty$. Это позволяет применить теорему 1.

Теорема 2. *Пусть $\Sigma nk_n<\infty$ и все формы*

$$\int_0^1\dots\int_0^1K_n(x,y_1,\dots,y_n)\varphi(x)\varphi(y_1)\dots\varphi(y_n)\,dx\,dy_1\dots dy_n$$

неотрицательно определены и хотя бы одна из них положительно определена. Тогда для любого натурального N можно указать такое $\delta>0$, что уравнение (2) *имеет не меньше чем N нормированных решений, если $\Sigma nl_n<\delta$.*

2. Пусть сепарабельное гильбертово пространство H разложено в ортогональную сумму двух подпространств H_1 и H_2, первое из которых конечномерно. Тогда каждый элемент $\varphi\in H$ допускает представление $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, $\varphi_1\in H_1$, $\varphi_2\in H_2$. Положим $J\varphi=\varphi_1-\varphi_2$.

Говорят, что функционал $F(\varphi)$ на гиперболоиде $(J\varphi,\varphi)=\rho>0$ возрастает, если $\lim F(\varphi)=+\infty$ при $\|\varphi\|\to\infty$, $(J\varphi,\varphi)=\rho$.

Пусть возрастающий равномерно дифференцируемый в любом шаре слабо непрерывный функционал $F(\varphi)$ четен и его градиент Γ при $(J\varphi,\varphi)>\rho$ удовлетворяет условию $(\Gamma\varphi,\varphi)>0$. Обозначим через N_a класс компактных множеств на гиперболоиде $(J\varphi,\varphi)=\rho$, обладающих тем свойством, что их нельзя стянуть на гиперболоиде в точку, осуществляя деформацию в лебеговом множестве $(F<a)$. Можно показать, что классы N_a при больших a непусты. Следуя М. А. Красносельскому ([5]), определим функцию $d(a)$ равенством

$$d(a)=\sup_{E_0\in N_a}\inf_{\varphi\in E_0}F(\varphi).\qquad(3)$$

Все значения $d(a)$ оказываются критическими значениями функционала $F(\varphi)$.

Теорема 3. *Каждое критическое значение $d(a)$ устойчиво, т. е. для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что функционал $F(\varphi)+G(\varphi)$ имеет на гиперболоиде критическое значение c и критическую точку φ, для которых*

$$|d(a)-c|<\varepsilon,\quad F(\varphi)+G(\varphi)=c,$$

если только слабо непрерывный и равномерно дифференцируемый в каждом шаре функционал $G(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{(J\varphi,\varphi)=\rho}|G\varphi)|+\sup_{(J\varphi,\varphi)=\rho,\,F(\varphi)>a}\|\operatorname{grad}G(\varphi)\|<\delta.$$

Когда функционал $F(\varphi)$ четен, то он имеет на гиперболоиде не меньше чем $\dim H_1$ ([9]), а при определенных условиях континуум ([10]) критических точек. Повидимому, основным случаем нужно считать тот, когда функция $d(a)$ принимает $\dim H_1$ различных значений. Для этого случая в условиях теоремы 3 δ может быть выбрано настолько малым, что и возмущенный функционал имеет не меньше чем $\dim H_1$ критических значений.

Как известно, вопрос о существовании собственных функций оператора

$$A\varphi = \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)]\, dy$$

с симметрическим ядром, имеющим конечное число положительных собственных значений, эквивалентен вопросу о существовании критических точек на гиперболоиде у некоторого слабо непрерывного функционала. Это позволяет из теоремы 3 сделать вывод о существовании определенного числа собственных функций на гиперболоиде в случае, когда $f(x, u) = f_1(x, u) + f_2(x, u)$, где $f_1(x, u)$ нечетна по u и удовлетворяет условиям, указанным, например, в ([9]). Относительно функции $f_2(x, u)$ приходится предполагать, что ее значения по абсолютной величине достаточно малы.

3. Построения, примененные при доказательстве теорем 1 и 3, могут быть обобщены на случай функционалов, рассматриваемых на более сложных поверхностях, чем сфера или гиперболоид. Критические значения функционалов определяются при этом по формуле (3), где в качестве N_a рассматриваются классы множеств, инвариантные относительно некоторого преобразования B поверхности в себя, при котором $F(B\varphi) > F(\varphi)$ во всех некритических точках. Оператор B мы определяем специальным способом.

Пусть функционал $F(\varphi)$ рассматривается на поверхности $\Phi(\varphi) = 1$, где $\Phi(\varphi)$ — однородный функционал порядка k. Градиенты функционалов $F(\varphi)$ и $\Phi(\varphi)$ обозначим через Γ и L. Пусть Π — некоторый оператор, действующий в E и удовлетворяющий на поверхности $\Phi(\varphi) = 1$ условию $|(L\varphi, \Pi\varphi)| \geqslant \alpha > 0$; пусть J — непрерывный и непрерывно обратимый оператор, действующий из E в сопряженное пространство $\overline{E}$. Пусть

$$B\varphi = \frac{\varphi + b(\varphi) D'\varphi}{\Phi^{1/k}[\varphi + b(\varphi) D'\varphi]}, \tag{4}$$

где

$$D'\varphi = J^{-1}D\varphi - \frac{(L\varphi, J^{-1}D\varphi)}{(L\varphi, \Pi\varphi)}\Pi\varphi, \quad D\varphi = \Gamma\varphi - \frac{(\Gamma\varphi, \Pi\varphi)}{(L\varphi, \Pi\varphi)}L\varphi,$$

причем символом (f, φ) здесь обозначается значение линейного функционала $f \in \overline{E}$ на элементе $\varphi \in E$, а $b(\varphi) = a[(D\varphi, J^{-1}D\varphi)]$, где $a(t)$ определяется аналогично функционалу (3.3) в статье ([11]).

Теорема 4. *Справедливо неравенство*

$$F(B\varphi) - F(\varphi) \geqslant \frac{b(\varphi)}{4}(D\varphi, J^{-1}D\varphi).$$

При оценке числа критических значений мини-максимальные рассуждения проводят относительно различных классов множеств N_a. Поэтому для оценки числа критических значений нужно уметь конструировать различные такие классы, отличающиеся друг от друга каким-либо инвариантом. Мы пользовались в значительной части работы понятием рода множеств, определяемым в более общей форме, чем это было сделано в ([6], [10]).

Замкнутое множество полного метрического пространства имеет род 1 относительно непрерывного преобразования A пространства E в себя,

если каждая связная компонента множества не содержит ни одной пары точек (x, Ax). Относительно E предполагается, что оно локально связно. Множество имеет род n, если его можно покрыть n замкнутыми множествами первого рода и нельзя покрыть меньшим числом таких множеств.

Род множеств обладает следующими свойствами:

Теорема 5. *Пусть преобразование B пространства E в себя коммутирует с A. Тогда при применении оператора B род множества не может уменьшиться.*

Теорема 6. *Род компактного и замкнутого множества не превышает его лебегову размерность плюс единица.*

Теорема 7. *Для каждого компактного множества можно указать такую окрестность, род которой совпадает с родом самого множества.*

Казанский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
1 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Усп. матем. наук, **2**, в. 1 (17) (1947). [2] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3 (1939). [3] В. И. Соболев, ДАН, **31**, № 3 (1941). [4] Э. С. Цитланадзе, Некоторые задачи вариационного исчисления в функциональных пространствах, Диссертация, МГУ, 1951. [5] М. А. Красносельский, ДАН, **97**, № 6 (1954). [6] М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, **7**, в. 2 (1952). [7] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearen Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin, 1931, S. 141—162. [8] Э. С. Цитланадзе, Тр. Московск. матем. общ., **2** (1953). [9] М. А. Красносельский, А. И. Поволоцкий, ДАН, **91**, № 1 (1953). [10] Ю. Г. Борисович, ДАН, **101**, № 2 (1955). [11] М. А. Красносельский, Матем. сборн., **33** (75) : 1 (1953).