Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

ФИЗИКА

Е. Л. ФЕЙНБЕРГ и Д. С. ЧЕРНАВСКИЙ

ВОЗМОЖНЫЙ МЕТОД УСТРАНЕНИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ В ПРОБЛЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ НУКЛОНОВ

(Представлено академиком И. Е. Таммом 1 VI 1955)

1. Введение. Известно, что в случае псевдоскалярных мезонов существующие методы мезонной теории не приводят к удовлетворительным результатам, в частности, не обеспечивают устойчивости дейтрона. Трудности явным образом объясняются тем, что проблема связи нуклонов переплетается с проблемой их собственной энергии. В результате сложилось убеждение, что решение, например, проблемы дейтрона неотделимо от решения проблемы собственной энергии частицы. Мы хотим отметить, что эта точка зрения, быть может, не необходима.

Дейтрон является системой существенно нерелятивистской. Его потенциальная энергия на 2 порядка, а энергия связи на 3 порядка меньше собственной энергии нуклонов. Среднее расстояние между нуклонами почти в 10 раз больше комптоновской длины волны нуклона. Степень релятивизма здесь, грубо говоря, такова же, как для K-электрона оболочки Na. Между тем при решении вопроса об устойчивости K-электрона в Na проблема собственной энергии электрона не возникает (она появляется только в более тонком вопросе о сдвиге уровня). Можно, следовательно, полагать, что задача об устойчивости дейтрона является более грубой проблемой, чем проблема лэмбовского смещения, она представляет собой проблему заведомо нерелятивистскую. Формально это связано с малостью отношения масс мезона и нуклона $\mu/M \approx 1/7$. Все это побуждает нас сделать новую попытку, основывающуюся на особом методе отделения собственной энергии частиц. Речь идет о частном методе рассмотрения в рамках мезонной теории таких задач, в которых, как можно полагать, проблема собственной энергии не должна переплетаться с существом изучаемого вопроса и может быть элиминирована (устойчивость дейтрона и более тяжелых ядер, а также рассеяние частиц при малых энергиях и т. п.).

Основная причина неудовлетворительности (даже в нерелятивистской области) попыток типа выбрасывания бесконечных членов, как нам кажется, состоит в том, что при этом может нарушаться нормировка волновой функции мезонного поля, причем, если константа связи не мала, то восстановление нарушенной нормировки не может быть передоверено будущей теории элементарных частиц *. Кроме того, как мы увидим, существенную роль может играть некоммутативность операторов взаимо-

* Норма всегда расходится (в случае скалярного поля логарифмически, в нашем случае квадратично) в члене, пропорциональном f^2 — квадрату константы связи. При малых f этот член становится существенным лишь если предельный верхний импульс мезона чрезвычайно велик и находится в области, где будущая теория, как можно надеяться, исправит положение. При больших f, при градиентной связи в особенности, это не так, недопустимое нарушение нормировки проявляется уже при импульсах порядка тех, что играют роль в конкретных физических проблемах.

действия, возникающая в мезонной теории от операторов σ и τ, которой нет, например, в случае кулоновского поля.

2. Метод. Мы исходим из схемы, не связанной непосредственно с применением теории возмущений, а именно, из разложения волновой функции по числам участвующих мезонов. Рассмотрение будет нерелятивистским по нуклонам. Поэтому отдачей, т. е. членами порядка k/M (k — импульс мезона) * пренебрегаем. Гамильтониан системы H есть:

$$H = H_{M_0} + H_\mu + H', \qquad H_{M_0} = \frac{1}{2M_0}(p_1^2 + p_2^2) + 2M_0,$$

$$H_\mu = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = k^2 + \mu^2, \quad H' = \sum_{\mathbf{k}} (H_{\mathbf{k}}^- + H_{\mathbf{k}}^+), \tag{1}$$

где $H_{\mathbf{k}}^-$, $H_{\mathbf{k}}^+$ — уничтожающая и рождающая части гамильтониана взаимодействия; M_0 — «затравочная» масса нуклона, которая может отличаться от наблюдаемой феноменологической массы $M = M_0 + \delta M$ (см. ниже). Остальные обозначения обычны. Для псевдоскалярных мезонов в симметричной теории имеем:

$$H_{\mathbf{k}}^- = \frac{f}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \{(\vec{\tau}_1 \mathbf{a}_{\mathbf{k}})(\vec{\sigma}_1 \mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} + (\vec{\tau}_2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}})(\vec{\sigma}_2 \mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_2}\}. \tag{2}$$

Волновая функция (функционал) системы в самом общем случае имеет вид

$$\Phi = \Big\{ \psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \sum_{\mathbf{k}} \psi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{k}) H_{\mathbf{k}}'^+ + \\ + \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \psi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) H_{\mathbf{k}_1}'^+ H_{\mathbf{k}_2}'^+ + \ldots \Big\} \Phi_0, \tag{3}$$

Здесь ψ_i — функция от $\mathbf{k}_i$ и координат нуклонов, в обозначениях которых опущены σ и τ; Φ_0 — функционал вакуума. Образовав при помощи Φ среднее значение от $(H - E)$ и варьируя его по $\psi_0, \psi_1, \ldots$, можно получить систему зацепляющихся уравнений Тамма. Эта система, даже оборванная, содержит расходимости, устранявшиеся раньше вычеркиванием, теперь — перенормировками. Мы поступим иначе. Уже выводя уравнения, мы наложим дополнительное условие при варьировании Φ так, чтобы в уравнениях не возникало расходимостей. В настоящем сообщении мы ограничиваемся простейшим приближением — одномезонным, т. е. в качестве пробной функции берем (3) с $\psi_2 = \psi_3 = \ldots = 0$. Роль высших приближений будет рассмотрена особо (будет, в частности, показано, что в проблеме дейтрона их вклад, повидимому, невелик). Пренебрегая отдачей, мы полагаем $\psi_1 = \psi_0^* \cdot g(\mathbf{k})$. Тогда

$$\langle \Phi | H - E | \Phi \rangle = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_0^* \Big\{ N^2(\mathbf{r})(H_{M_0} - E) + \\ + \sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (|g|^2 \omega_{\mathbf{k}} + fg + fg^*)(1 + \varepsilon_{12} \cos \mathbf{k}\mathbf{r}) \Big\} \psi_0; \tag{4}$$

$$N^2(\mathbf{r}) = 1 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} |g|^2 (1 + \varepsilon_{12} \cos \mathbf{k}\mathbf{r}), \tag{5}$$

* $\hbar = c = 1$.

$N^2(\mathbf{r})$ — «нормировочный оператор»; $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$; $\varepsilon_{12} = (3k^2)^{-1}(\vec{\sigma}_1\mathbf{k})(\vec{\sigma}_2\mathbf{k})(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)$. В дальнейшем, считая центр тяжести отделенным, мы вместо $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, пишем только $\mathbf{r}$.

Варьируя (4) по ψ_0^*, получаем уравнение (первое из уравнений метода Тамма) для ψ_0:

$$\left\{N^2(\mathbf{r})(H_{M_0} - E) + \sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}}(|g|^2\omega_{\mathbf{k}} + f(g + g^*))(1 + \varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr})\right\}\psi_0 = 0. \quad (6)$$

В сумме $1 + \varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr}$ первое слагаемое отражает самодействие, второе — взаимодействие.

Прежде чем получать второе уравнение, для мезонного поля (варьирование по $g^*(\mathbf{k})$), мы накладываем дополнительное условие, имеющее физический смысл перенормировки массы. В этом центральный пункт нашей попытки.

При $r \to \infty$ нуклоны феноменологически ведут себя как частицы массы M. Уравнение для мезонного поля должно обеспечивать это, т. е. должно быть $\psi_0(r)|_{r\to\infty} \sim \exp(-\alpha r)$, $\alpha = \sqrt{M(-E + 2M)}$. Для связанного состояния $E = 2M - \varepsilon_D$, где ε_D — энергия связи; в проблеме рассеяния α мнимо. Подставляя это асимптотическое значение ψ_0 в (6) и учитывая, что при $r \to \infty$ быстро осциллирующее слагаемое с $\cos\mathbf{kr}$ дает нуль, получаем условие, которому должно удовлетворять g:

$$2\delta M\left(1 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}}|g|^2\right) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}}(\omega_{\mathbf{k}}|g|^2 + fg + fg^*). \quad (7)$$

Считая здесь δM некоторой определенной, конечной величиной, мы теперь варьируем при дополнительном условии (7) выражение (4) по g^* и получаем уравнение (отличное от соответствующего уравнения метода Тамма), из которого следует:

$$g(\mathbf{k}) = -\frac{f(\lambda + \overline{1 + \varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr}})}{(\lambda + \overline{1 + \varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr}})\omega_{\mathbf{k}} + \overline{(1 + \varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr})(H_{M_0} - E)} - 2\delta M\lambda}. \quad (8)$$

Здесь обозначено: $\overline{A} = \int \psi_0^* A \psi_0 d\mathbf{r}$; λ — множитель Лагранжа.

Подставив (8) в (7), легко убедиться, что сумма по k расходится и притом так, что δM бесконечно во всех случаях, кроме случая $\lambda = -\overline{1}$. Следовательно, $\lambda = -\overline{1}$ и

$$g(\mathbf{k}) = g^*(\mathbf{k}) = -\frac{f}{\omega_{\mathbf{k}} + \dfrac{\overline{H_{M_0} - E + 2\delta M + (H_{M_0} - E)\varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr}}}{\overline{\varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr}}}}. \quad (9)$$

Это выражение отличается от соответствующего выражения, даваемого теорией возмущений, вторым слагаемым в знаменателе. При $k \to \infty$ $\cos\mathbf{kr} \to 0$ и второе слагаемое растет при соответствующих ψ_0 быстрее, чем $\omega_{\mathbf{k}}$, обеспечивая сходимость интегралов и уменьшая сингулярность взаимодействия на малых расстояниях.

Полагая $H_{M_0} + 2\delta M \approx H_M$, мы получаем по подстановке (9) в (6) уравнение для ψ_0:

$$\begin{gathered} N^2(\mathbf{r})\{H_M - E + V(\mathbf{r})\}\psi_0 = 0; \\ N^2(\mathbf{r})\,V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}}(\omega_{\mathbf{k}}g^2 - 2fg)\varepsilon_{12}\cos\mathbf{kr}, \end{gathered} \quad (10)$$

в котором «оператор потенциала» $V(\mathbf{r})$ согласно (9) сам зависит от ψ_0. Таким образом, уравнение для ψ_0 является существенно нелинейным. Оно не содержит расходимостей.

3. Заключение. Обычно строят уравнения, не ограничивая возможного поведения мезонного поля и получающуюся бесконечную энергию этого поля складывают с начальной («затравочной») энергией покоя частицы. Сумма обозначается затем как феноменологическая энергия покоя нуклона. Мы уже при построении уравнений учитываем условие, которому должна удовлетворять волновая функция мезонного поля, чтобы энергия покоя частицы совпадала с феноменологической и была конечной.

При применениях можно либо решать уравнение (10) независимо, отсюда по (9) определять $g(\mathbf{k})$, а затем по (7) δM; либо (и мы предпочитаем этот путь) решать совместно систему уравнений. В условии (7) мы при этом можем положить, например, δM равным нулю или другой малой величине. Этому нетрудно удовлетворить, подобрав соответственно поведение ψ_0 на малых расстояниях r, где эта функция все равно, как оказывается, очень мала.

Подобный полуфеноменологический метод элиминирования собственной энергии в нерелятивистских задачах можно, таким образом, рассматривать как последовательный метод самосогласованного поля в мезонной теории взаимодействия нуклонов.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
27 V 1955