Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. С. ГОНОРОВСКИЙ

О ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ В ЛАМПОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 25 IX 1954)

В данной статье рассматривается влияние дробового эффекта на работу генератора в стационарном режиме*. Вопросу о статистических явлениях в ламповом генераторе посвящены работы И. Л. Берштейна ([2,3]) и Г. С. Горелика ([4,5]). В работах ([2,3]) рассмотрение основано на приложении уравнения Эйнштейна — Фоккера к движению изображающей точки на фазовой плоскости. Такой путь несколько сложен, и доведение решения до конца оказалось возможным при наложении условий, не характерных для реального генератора (например, одинаковость воздействий от дробового эффекта и от тепловых флуктуаций). Ниже излагается простой и наглядный метод, свободный от указанных недостатков.

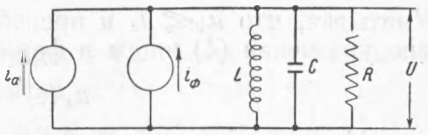


Рис. 1

Дальнейшее рассмотрение базируется на следующих предпосылках: а) спектр дробового тока, как и в случае насыщенного диода, равен $2eI_{a0}$; б) флуктуационные напряжения, развиваемые дробовым током в линейных элементах схемы, оказывают на фазу первой гармоники тока влияние, определяемое нелинейным характером устройства и наличием обратной связи. Интенсивность и статистические свойства дробового тока, однако, не зависят от реакции внешней схемы и определяются исключительно величиной I_{a0}. Последнее допущение позволяет свести влияние дробового эффекта к действию независимого шумового генератора тока i_ϕ, подключенного параллельно основному генератору тока i_a (см. рис. 1). Суммарное напряжение на контуре u является результатом линейного наложения двух напряжений: флуктуационного u_ϕ и «динамического» u_a, причем последнее несет на себе отпечаток влияния первого. Нетрудно выявить основные характеристики напряжения $u_\phi(t)$. Спектр среднего квадрата этого напряжения

$$W_\phi(\omega) = 2eI_{a0}\,|z(\omega)|^2 = \frac{2eI_{a0}R^2}{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \approx \frac{2eI_{a0}R^2}{1+(\omega-\omega_0)^2\tau_0^2}, \qquad (1)$$

где $Q = R/\rho$, $\tau_0 = 2RC$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Интенсивность

$$\sigma^2 = \overline{u_\phi^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_\phi(\omega)\,d\omega = \frac{eI_{a0}R^2\omega_0}{2Q}. \qquad (2)$$

* Влияние флуктуаций на запуск генератора рассматривалось в работе ([1]).

Случайный процесс $u_\Phi(t)$, как известно, подчинен нормальному закону распределения. Для дальнейшего удобно $u_\Phi(t)$ представить в форме:

$$u_\Phi(t) = U_\Phi(t)\cos\lambda(t) = U_\Phi(t)\cos(\omega_0 t - \theta), \tag{3}$$

где $U_\Phi(t)$ и $\theta(t)$ при достаточно узкой полосе контура являются медленными функциями времени*.

Для определения u_a могут быть использованы следующие очевидные соотношения:

$$C\frac{du_a}{dt} + \frac{1}{R}u_a + \frac{1}{L}\int u_a\,dt = i_a; \quad i_a = s_0 u_g - \gamma u_g^3; \quad u_g = k\,(u_a + u_\Phi),$$

где k — коэффициент обратной связи автогенератора. Эти соотношения приводят к уравнению:

$$\frac{d^2u_a}{dt^2} + \left[\frac{1}{CR} - \frac{s_0 k}{C} + \frac{3\gamma k^3}{C}(u_a + u_\Phi)^2\right]\frac{du_a}{dt} + \omega_0^2 u_a = \\ = \left[\frac{s_0 k}{C} - \frac{3\gamma k^3}{C}(u_a + u_\Phi)^2\right]\frac{du_\Phi}{dt}. \tag{4}$$

Учитывая, что $u_\Phi \ll u_a$ и пренебрегая флуктуациями амплитуды, решение уравнения (4) ищем в форме

$$u_a(t) = U_0\cos(\lambda - \varphi), \tag{5}$$

где U_0 — постоянная величина. Подставив (5) в (4) и сделав обычные упрощения, основанные на высокой избирательности контура и медленности изменения $U_\Phi(t)$ и $\theta(t)$, получим для фазы φ следующее уравнение:

$$\dot\varphi = -\dot\theta - \frac{U_\Phi}{2RCU_0}\sin\varphi = -\dot\theta - \frac{n}{\tau_0}\sin\varphi, \quad \text{где } n = U_\Phi/U_0. \tag{6}$$

Мгновенная частота автоколебания, в соответствии с (3), (5) и (6), есть

$$\omega(t) = \dot\lambda - \dot\varphi = \omega_0 + \frac{n}{\tau_0}\sin\varphi. \tag{7}$$

Следует иметь в виду**, что $\overline{\dot\theta^2} \gg \overline{n^2}/\tau_0^2$. Действительно, левая часть этого неравенства имеет порядок величины $1/\tau_0^2$ (см. (6)), а $\overline{n^2} = 10^{-10} \div 10^{-14}$.

Можно поэтому в согласии с (6) в первом приближении считать $\dot\varphi \approx -\dot\theta$ и $\varphi \approx -\theta$. Подставляя это значение φ в (7), получаем:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{n}{\tau_0}\sin\theta = \omega_0[1 - s(t)]. \tag{8}$$

Здесь функция

$$s(t) = \frac{n}{2Q}\sin\theta = \frac{U_\Phi\sin\theta}{2QU_0} \tag{9}$$

определяет относительное изменение частоты, обусловленное дробовым эффектом. Как и основной, случайный процесс $u_\Phi(t)$, $s(t)$ подчиняется нормальному закону распределения. Дисперсия частотного отклонения

---

* Для уточнения результата вместо ω_0 в (3) необходимо брать «среднюю» частоту (см. (6), стр. 202). При узкой полосе контура ошибка получается незначительной.

** При определении $\overline{\dot\theta^2}$ необходимо устранить затруднения, связанные с медленным убыванием $W_\Phi(\omega)$ на бесконечности (см. (6), стр. 202, 332—334). В данном случае этот вопрос несуществен, поскольку величина $\dot\theta$ из дальнейших выражений выпадает.

$$\overline{s^2(t)} = s_{эф}^2 = \frac{\overline{(U_ф \sin\theta)^2}}{4Q^2U_0^2} = \frac{\sigma^2}{4Q^2U_0^2}. \qquad (10)$$

Используя формулу (2), получаем:

$$s_{эф} = \frac{1}{4U_0C}\sqrt{\frac{2eI_{a0}}{Q\omega_0}}, \qquad (11)$$

где U_0 — амплитуда динамического напряжения на емкости контура.

Оценим порядок величины $s_{эф}$. При $f_0 = 2\cdot10^7$ гц, $C = 50$ $\mu\mu$ф, $I_{a0} = 0{,}01$а, $U_0 = 100$ в и $Q = 60$ (данные примера взяты из работы [4], стр. 191), получим $s_{эф} \approx 3\cdot10^{-8}$.

Обратимся к определению флуктуации фазы. Полная фаза

$$\vartheta(t) = \int_0^t \omega(t)\,dt = \omega_0 t - \omega_0 \int_0^t s\,dt = \omega_0 t - \gamma_t. \qquad (12)$$

Флуктуационная разность фаз за время τ

$$x(\tau) = -(\gamma_{t+\tau} - \gamma_t) = -\omega_0 \int_t^{t+\tau} s\,dt = -\omega_0[\varepsilon(t+\tau) - \varepsilon(t)]. \qquad (13)$$

Случайный процесс $x(\tau)$, как и функция $s(t)$, имеет нормальное распределение. Для определения дисперсии $\overline{x^2(\tau)}$ учтем, что спектр $W_\varepsilon(\Omega)$ функции $\varepsilon(t)$, являющейся интегралом от $s(t)$, равен $\frac{1}{\Omega^2}W_s(\Omega)$. Здесь $W_s(\Omega)$ — спектр случайного процесса $s(t)$ — определяется, в соответствии с выражениями (9) и (10), спектром произведения $U_ф \sin\vartheta$. При узкой полосе частот последний может быть получен удвоением $W_ф(\omega)$ при замене $\omega - \omega_0$ на Ω (см. формулу (1)). Таким образом, мы можем написать

$$W_s(\Omega) = \frac{2W_ф(\omega_0+\Omega)}{4Q^2U_0^2} = \frac{eI_{a0}R^2}{Q^2U_0^2(1+\Omega^2\tau_0^2)}. \qquad (14)$$

Представляя функцию корреляции для случайного процесса $\varepsilon(t)$ в виде:

$$\psi_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{W_s(\Omega)}{\Omega^2}\cos\Omega\tau\,d\Omega,$$

получаем для среднего квадрата набега фазы за время τ общее выражение

$$\overline{x^2(\tau)} = \overline{(\gamma_{t+\tau} - \gamma_t)^2} = 2\omega_0^2[\psi_\varepsilon(0) - \psi_\varepsilon(\tau)] =$$
$$= \frac{\omega_0^2}{\pi}\tau\int_0^\infty \frac{W_s(\Omega)(1-\cos\Omega\tau)}{\Omega^2\tau^2}\,d(\Omega\tau). \qquad (15)$$

При значениях τ настолько малых по сравнению с временной постоянной контура τ_0, что $W_s(\Omega)$ убывает практически до нуля раньше, чем теряет силу приближение $\cos\Omega\tau \approx 1 - \Omega^2\tau^2/2$, можно считать:

$$\overline{x^2(\tau)} \approx \frac{\omega_0^2}{\pi}\frac{\tau}{2}\int_0^\infty W_s(\Omega)\,d(\Omega\tau) = \frac{eI_{a0}}{4U_0^2C^2\tau_0}\tau^2. \qquad (16)$$

При $\tau \gg \tau_0$, наоборот, знаменатель $\Omega^2\tau^2$ обращает подинтегральную функцию в выражении (15) практически в нуль раньше, чем $W_s(\Omega)$ сколько-нибудь заметно убывает. Можно поэтому при $\tau \gg \tau_0$ считать

$$\overline{x^2(\tau)} = \frac{\omega_0^2}{\pi}W_s(0)\tau\frac{\pi}{2} = \frac{eI_{a0}}{2U_0^2C^2}\tau = D\tau. \qquad (17)$$

Обращаясь теперь к функции корреляции для напряжения $u_a(t)$

$$\psi_a(\tau) = U_0^2 \overline{\cos \vartheta_{t+\tau} \cdot \vartheta_t} = {}^1/_2\, U_0^2 \cos \omega_0 \tau \cdot \overline{\cos x}$$

и используя найденное выше нормальное распределение для $x(\tau)$, получаем, что $\overline{\cos x} = \exp(-{}^1/_2 \overline{x^2})$. Тогда спектр среднего квадрата напряжения:

$$W_a(\omega) = 4 \int_0^\infty \psi_a(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau =$$

$$= U_0^2 \int_0^\infty e^{-\overline{x^2}/2} \cos(\omega - \omega_0)\tau \, d\tau + U_0^2 \int_0^\infty e^{-\overline{x^2}/2} \cos(\omega + \omega_0)\tau \, d\tau. \qquad (18)$$

Второе слагаемое в правой части (18) может быть отброшено ввиду медленности изменения множителя $\exp(-\overline{x^2}/2)$. В первом слагаемом решающее значение имеет область значений τ, в которой τ очень велико по сравнению с τ_0. Можно поэтому исходить из формулы (17) для $\overline{x^2(\tau)}$, соответственно чему получается следующее окончательное выражение для спектра среднего квадрата напряжения:

$$W_a(\omega) = U_0^2 \frac{D/2}{D^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}. \qquad (19)$$

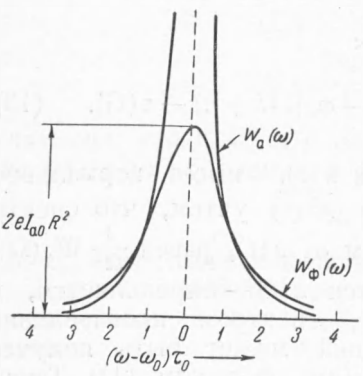


Рис. 2

Величина D, в соответствии с (17), определяется выражением:

$$D = \frac{\omega_0^2 W_s(0)}{2} = \frac{eI_{a0}}{2U_0^2 C^2}. \qquad (20)$$

Выражения (19) и (20) совпадают, в основном, с результатами статей ([3],[5]). При данных приведенного выше примера $D \approx 3 \cdot 10^{-5}$ и $D/\omega_0 \approx 2 \cdot 10^{-13}$.

Сопоставляя формулы (11) и (20), убеждаемся, что спектр генератора состоит из резко выраженного пика с «толщиной» D (на уровне 0,5) и относительно широкой полосы $2s_{эф}\omega_0 = (D\omega_0/Q)^{1/2}$, в пределах которой спектр убывает (в области $\omega - \omega_0 \gg D$) по закону:

$$\frac{U_0^2 D}{2(\omega - \omega_0)^2} = \frac{eI_{a0}R^2}{(\omega - \omega_0)^2 \tau_0^2}.$$

На этот спектр линейно накладывается спектр $W_\Phi(\omega)$, определяемый формулой (1). Соотношение между $W_a(\omega)$ и $W_\Phi(\omega)$ показано на рис. 2. Интересно отметить, что в случае усилителя вместо $W_a(\omega)$ получится дискретное колебание с частотой ω_0 (пунктирная линия на рис. 2). Таким образом, расширение спектра напряжения u_a является результатом влияния флуктуационного напряжения на первую гармонику анодного тока (по каналу обратной связи автогенератора).

Поступило
10 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Гоноровский, ДАН, **94**, № 5 (1954). [2] И. Берштейн, ЖТФ, **11**, 4, 305 (1941). [3] И. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 2, 145 (1950). [4] Г. Горелик, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 2, 187 (1950). [5] Г. Горелик, ЖЭТФ, **20**, 4, 351 (1950). [6] В. Бунимович, Советское радио (1951).