Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

ФИЗИКА

Академик Н. Н. БОГОЛЮБОВ и Д. В. ШИРКОВ

ПРИЛОЖЕНИЕ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ К УЛУЧШЕНИЮ ФОРМУЛ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В предыдущей заметке [1] были получены общие уравнения Ли для ренормализационной группы в квантовой электродинамике. Имеем оттуда

$$\frac{\partial e^2 d(x, y, e^2)}{\partial x} = \frac{e^2 d(x, y, e^2)}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}, e^2 d\right), \tag{1}$$

где

$$x = \frac{k^2}{\lambda^2}, \quad y = \frac{m^2}{\lambda^2}, \quad \varphi\left(\frac{y}{x}, e^2 d\right) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} d\left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2)\right)\right]_{\xi=1}; \tag{2}$$

и

$$\ln \frac{s(x, y, e^2)}{s(x_0, y, e^2)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{z}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln s\left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d\right)\right]_{\xi=1}. \tag{3}$$

Входящий в эти формулы заряд e^2 связан с экспериментальным зарядом e_0^2 соотношением

$$e^2 d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right) = e_0^2 d^0\left(\frac{k^2}{m^2}, e_0^2\right). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь асимптотическую область больших импульсов, когда $m^2/|k^2| \ll 1$. В этом случае формулы (1) и (3) можно упростить, положив в них $y = 0$:

$$\frac{\partial e^2 d(x, 0, e^2)}{\partial x} = \frac{e^2 d}{x} \varphi(0, e^2 d), \tag{5}$$

$$\ln \frac{s(x, 0, e^2)}{s(x_0, 0, e^2)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{z}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln s(\xi, 0, e^2 d)\right]_{\xi=1}. \tag{6}$$

Интегрируя (5), приходим к уравнению Гел-Мана и Лоу [2] для $e^2 d$:

$$\int_{e^2}^{e^2 d(x)} \frac{dz}{z\varphi(0, z)} = \ln x, \tag{7}$$

а уравнение (6) преобразуем к виду

$$\ln \frac{s(x, 0, e^2)}{s(x_0, 0, e^2)} = \int_{e^2 d(x_0)}^{e^2 d(x)} \frac{dz}{z\varphi(0, z)}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln s(\xi, 0, z)\right]_{\xi=1}. \tag{8}$$

Замечая, что переход от (1), (3) к (5) и (6) соответствует условию

$$k^2 \sim \lambda^2 \gg m^2,$$

получаем из (4)

$$e^2 d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, 0, e^2\right) = e_0^2 d_{ac}^0\left(\frac{k^2}{m^2}, e_0^2\right), \tag{9}$$

где d_{ac}^0 обозначает асимптотическую форму функции d^0 при больших k^2/m^2. Но, так как тождественно

$$e_\lambda^2 d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, 0, e_\lambda^2\right) = e_m^2 d\left(\frac{k^2}{m^2}, 0, e_m^2\right),$$

то

$$e^2 d\left(\frac{k^2}{m^2}, 0, e^2\right) = e_0^2 d_{ac}^0\left(\frac{k^2}{m^2}, e_0^2\right), \tag{10}$$

причем

$$e^2 = e_0^2 d_{ac}^0(1, e_0^2). \tag{11}$$

По обычной теории возмущений находим в области больших импульсов

$$d^{-1}(\xi, 0, e^2) = 1 - \frac{e^2}{3\pi}\ln\xi - \frac{e^4}{4\pi^2}\ln\xi + \cdots, \tag{12}$$

откуда при помощи (2) находим

$$\frac{1}{\varphi(0, z)} = \frac{3\pi}{4\pi}\left\{1 - \frac{3z}{4\pi} + c_1 z^2 + \cdots\right\}. \tag{13}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что величина $e^2 d$ не может оставаться малой при всех x. Действительно, пока $e^2 d$ достаточно мало,

$$\frac{1}{\varphi(0, z)} < \frac{3\pi}{z}(1 + c), \quad c > 0$$

и

$$\ln x < 3\pi \int_{e^2}^{e^2 d} \frac{dx}{x}(1 + c) < \frac{3\pi}{e^2}(1 + c).$$

Следует отметить, что аргумент функции φ представляет квадрат заряда, и поэтому для выяснения поведения функций Грина при сверхбольших импульсах, когда $e^2 d$ становится величиной порядка единицы и выше, необходимо исследовать область больших зарядов (сильная связь). При этом нужно иметь в виду, что структура $\varphi(0, z)$ здесь уже не может быть определена на основе анализа конечного числа членов разложения типа (12).

Если в результате исследования окажется, что

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dz}{z\varphi(0, z)} < \infty,$$

то подтвердится предположение Ландау о неполноте современной квантовой электродинамики, поскольку в этом случае возможные значения $|k^2|$ будут ограничены. Так как сейчас мы не имеем средств для решения этого принципиального вопроса, то должны оставаться

в области, где $e^2 \ln (k^2/m^2) < 1$. В этой области мы можем получить из наших уравнений асимптотические разложения типа

$$f\left(e^2 \ln \frac{k^2}{m^2}\right) + e^2 f_1\left(e^2 \ln \frac{k^2}{m^2}\right) + \cdots \tag{14}$$

Таким путем из уравнения типа (7) А. А. Абрикосов построил поправки к выражению для d_{ac}, найденному в работе трех авторов ([3]). Для фактического определения коэффициентных функций разложения (14) для функции d стоит лишь, подставив (13) в (7), получить

$$1 - d^{-1} - \frac{3}{4\pi} e^2 \ln d + c_1 e^4 (d-1) + \cdots = \frac{e^2}{3\pi} \ln x, \tag{15}$$

откуда сразу имеем

$$d^{-1}(x, 0, e^2) = 1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln x + \frac{3}{4\pi} e^2 \ln\left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln x\right) + \cdots \tag{16}$$

Совершенно аналогично при помощи уравнения (8) можно переходить от разложений обычной теории возмущений к разложениям типа (14) для коэффициентов фермионной функции Грина a и b. Так, по теории возмущений находим

$$a(\xi, 0, e^2) = 1 + c_2 e^4 \ln \xi + \cdots,$$

$$b(\xi, 0, e^2) = b_0\left[1 - \frac{3e^2}{4\pi} \ln \xi + e^4 (c_3 \ln^2 \xi + c_4 \ln \xi) + \cdots\right],$$

откуда вытекает, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln a(\xi, 0, z)\right]_{\xi=1} = c_2 z^2 + \cdots; \quad \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln b(\xi, 0, z)\right]_{\xi=1} = -\frac{3z}{4\pi} + c_4 z^2 + \cdots$$

Подставляя эти выражения в (8) с учетом (13), находим, полагая $x_0 = 1$:

$$\ln a(x, 0, e^2) = 3\pi c_2 e^2 [d(x, 0, e^2) - 1] + \cdots, \tag{17}$$

$$\ln \frac{b(x, 0, e^2)}{b(1, 0, e^2)} = \frac{9}{4} \ln d^{-1} + 3\pi c_4 e^4 (d - 1) + \cdots \tag{18}$$

Вместо d в (17) и (18) следует подставить разложение (16). Оставляя в этих формулах главные члены, т. е. ограничиваясь в формулах теории возмущений вторым приближением, приходим к результатам, полученным в работах ([3,4]) асимптотическим решением сложных интегральных уравнений, основанных на суммировании определенного класса «главных» диаграмм Фейнмана.

Полученные выше общие групповые уравнения (1) и (3) позволяют также проводить рассмотрение и других областей, например, области $k^2 \sim m^2$, где функции a и b имеют «инфракрасные особенности». Записав для этого s в форме

$$s\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right) = S\left(\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2 - m^2}, \frac{\lambda^2 - m^2}{m^2}, e^2\right), \tag{19}$$

преобразуем (3), положив там $y = 1$, к виду

$$\ln \frac{s(x, 1, e^2)}{s(x_0, 1, e^2)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{z-1} \left[\frac{d}{d\xi} \ln S(\xi, z-1, e^2 d(z, 1, e^2))\right]_{\xi=1}; \quad x = \frac{|\kappa^2|}{m^2}, \tag{20}$$

откуда сразу вытекает характер особенности s при $k^2 \sim m^2$.

Взяв для этого второе приближение теории возмущений

$$A(\xi, y, e^2) = 1 - \frac{3e^2}{2\pi}\left(\frac{\ln \xi y}{1+\xi y} - \frac{\ln y}{1+y}\right) + \cdots, \tag{21}$$

$$B(\xi, y, e^2) = 1 - \frac{3e^2}{2\pi}\left(\frac{2+\xi y}{2+2\xi y}\ln \xi y - \frac{\ln y}{1+y}\right) + \cdots, \tag{22}$$

$$e^2 d = e^2 + \cdots,$$

получаем

$$\frac{a(x, 1, e^2)}{a(x_0, 1, e^2)} = (|x-1|)^{-\frac{3e^2}{2\pi x}}(|x_0-1|)^{\frac{3e^2}{2\pi x_0}}, \tag{23}$$

$$\frac{b(x, 1, e^2)}{b(x_0, 1, e^2)} = (|x-1|)^{-\frac{3e^2}{4\pi}\left(\frac{1+x}{x}\right)}(|x_0-1|)^{\frac{3e^2}{4\pi}\left(\frac{1+x_0}{x_0}\right)}, \tag{24}$$

причем разности $1-x$ и $1-x_0$ должны иметь одинаковый знак. Мы получили таким образом для области $k^2 \sim m^2$ известную степенную особенность.

Совершенно ясно, что аналогичный анализ может быть проведен и для вершинного оператора Γ^n.

Изложенный метод может быть перенесен в мезонные теории. Так, если в псевдоскалярной мезонной теории мы фиксируем каким-либо определенным способом прямое мезонное взаимодействие, связанное с 4-узлом, то ренормализационная группа примет вид

$$S' = z_1 S; \quad \Gamma' = z_2^{-1}\Gamma; \quad D' = z_3 D; \quad g'^2 = z_1^2 z_2^{-2} z_3^{-1} g^2,$$

где Γ — коэффициент при $\gamma^5\tau$ в выражении $\Gamma^5(p, p)$.

Вводя функцию $\delta = S^2\Gamma^2 D$, найдем для δ дифференциальное уравнение типа (1), а S, Γ, D выразятся квадратурами типа (3).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, ДАН, **103**, № 2 (1955). [2] M. Gell-Mann, F. E. Low, Phys. Rev., **95**, 1300 (1954). [3] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, **95**, 1177 (1954). [4] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, **95**, 497 (1954); **95**, 773 (1954); **96**, 261 (1954).