Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

ГИДРАВЛИКА

В. П. ПИЛАТОВСКИЙ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ БАТАРЕЙ СКВАЖИН, ДРЕНИРУЮЩИХ ПЛАСТ ПРИ НАПОРНОМ РЕЖИМЕ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 7 IV 1955)

1. Нефтяные месторождения обычно имеют форму вытянутых овалов. В связи с этим возникает задача о расчете дебитов (или расходов), а также забойных давлений эксплуатационных и нагнетательных скважин овальных батарей. В приближенной постановке эту задачу рассматривал А. П. Крылов (1), предложивший метод геометрического сопряжения известных элементов течения, характеризующих работу круговых батарей скважин. Ниже дано решение задач о гидродинамическом взаимодействии системы N эллиптических конфокальных батарей скважин, разрабатывающих однородный горизонтальный неограниченный пласт постоянной мощности $T = 1$, насыщенный однородной несжимаемой жидкостью с вязкостью $\mu = \text{const}$; проницаемость пласта $k = \text{const}$. Все скважины предполагаются совершенными с одинаковым рабочим радиусом r_0.

Перенумеруем все батареи, начиная счет с внутренней. Пусть батарея с номером s имеет n (n четное) скважин, причем последние расположены симметрично относительно главных осей; очевидно, n является заданной функцией от s

$$n = f(s) \quad (s = 1, 2, \ldots, N). \tag{1}$$

На вспомогательной плоскости (рис. 1) комплексного переменного ζ определяем комплексный потенциал

$$w(\zeta) = \varphi + i\psi = \sum_{(s)} A_s \ln (\zeta^n - R_s^n)(R_s^n - d^{2n}/\zeta^n) + B \quad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{2}$$

где $\varphi = -kp/\mu$ — потенциал скорости, причем p — давление; ψ — функция тока; A_s и B — постоянные, определяемые по граничным условиям (дебит q_s, одинаковый для скважин s-й батареи, и среднее пластовое давление p_1 на круговом контуре радиуса r_1); R_s и d связаны с полуосями a_s, b_s s-го эллипса

$$R_s = {}^1/_2(a_s + b_s), \quad d^2 = {}^1/_4(a_s^2 - b_s^2) \quad (s = 1, 2, \ldots, N). \tag{3}$$

В точках

$$\zeta_{st} = R_s e^{2\pi i t/n} \quad (s = 1, 2, \ldots, N;\ t = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

лежащих в области D (внешность окружности $|\zeta| = d$), комплексный потенциал $w(\zeta)$ имеет лишь логарифмические особенности (источники и стоки). Кроме этого функция $w(\zeta)$ имеет еще одну логарифмическую особенность в бесконечно удаленной точке области D. Фильтрационный поток, определенный потенциалом (2), вдали от внешней батареи приближается к радиальному.

На окружности $|\zeta| = d$ имеем $\psi = \pi \sum_{(s)} A_s = \text{const}$, поэтому граница D есть линия тока.

Отобразим D на область D^* плоскости основного комплексного переменного z (рис. 2) при помощи функции

$$z = \zeta + d^2/\zeta. \tag{5}$$

Граница D отобразится в отрезок $C'C$ длиною $2d$ вдоль действительной оси Ox плоскости z. Семейство окружностей $|\zeta| = R_s$ перейдет в семейство конфокальных эллипсов с полуосями a_s, b_s и конфокальным отрезком $C'C = 2d$ (рис. 2).

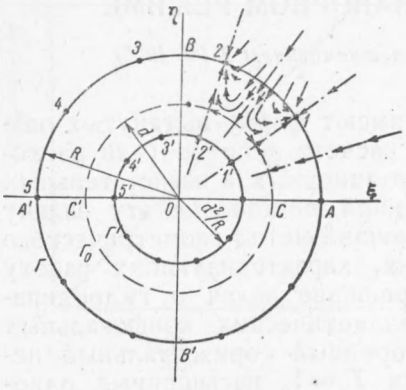


Рис. 1

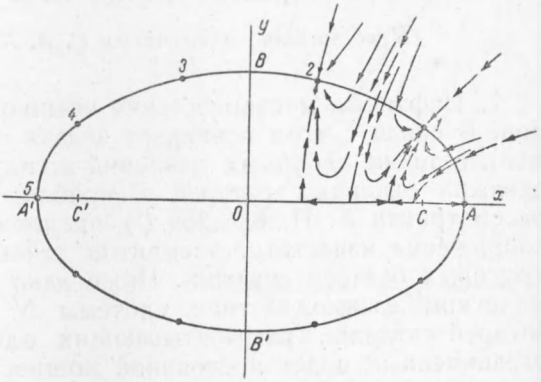


Рис. 2

Комплексный потенциал $w(z)$, получаемый в результате исключения ζ из (2) и (5), определит искомое течение в области D^*.

На основании (3) и (5) логарифмические особенности функции $w(z)$ определяются прямоугольными координатами

$$x_{st} = a_s \cos\frac{2\pi t}{n}, \quad y_{st} = b_s \sin\frac{2\pi t}{n}, \tag{6}$$

$$n = f(s) \quad (s = 1, 2, \ldots, N;\ t = 1, 2, \ldots, n).$$

Зависимости (6) определяют в D^* положение скважины с номером t ($t = 1, 2, \ldots, n$), принадлежащей батарее с номером s ($s = 1, 2, \ldots, N$).

Бесконечно удаленная точка области D перейдет в бесконечно удаленную точку области D^*, поэтому фильтрационный поток вдали от скважин внешней эллиптической батареи на плоскости z будет приближаться к радиальному. В силу этого достаточно удаленная эквипотенциаль ($\varphi = \text{const}$) по форме будет приближаться к окружности радиуса r_1. Примем, что на этой окружности в области D^* известно среднее пластовое давление p_1; тогда постоянные A_s и B найдем при помощи формул (2), (3) статьи [2]:

$$q_s = -2\pi A_s; \qquad -\frac{k}{\mu} p_1 = \sum_{(s)} A_s \ln r_1^n R_s^n + B \quad (s = 1, 2, \ldots, N). \tag{7}$$

Таким образом, комплексный потенциал $w(\zeta)$, а вместе с ним и $w(z)$ определены полностью.

Понижение давления $p_1 - p_{st}$ на скважине с индексом st находим по формуле (4) из [2]; в результате получаем основную зависимость

$$2\pi\frac{k}{\mu}(p_1-p_{st})=q_s\ln\frac{R_s\sqrt{1-2\varepsilon_s\cos\frac{4\pi t}{n}+\varepsilon_s^2}}{n\alpha_s^n r_0(1-\varepsilon_s^n)}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{(\sigma)}{}'q_\sigma\ln\left(\alpha_s^{2\nu}+\alpha_\sigma^{2\nu}-2\alpha_s^\nu\alpha_\sigma^\nu\cos\frac{2\pi\nu t}{n}\right)\left(1+\varepsilon_s^\nu\varepsilon_\sigma^\nu-2\sqrt{\varepsilon_s^\nu\varepsilon_\sigma^\nu}\cos\frac{2\pi\nu t}{n}\right), \quad (8)$$

где $n=f(s)$ $(s=1,2,\ldots,N;\ \ t=1,2,\ldots,n);\ \ \nu=f(\sigma)$ $(\sigma=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,N);\alpha_s=\frac{a_s+b_s}{2r_1};\ \ \varepsilon_s=\frac{a_s-b_s}{a_s+b_s}$ $(a_s<r_1)$.

В случае, когда система батарей сводится к одной батарее, в правой части зависимости (8) второе слагаемое отсутствует. Поскольку все ε_s всегда меньше единицы, то при n, ν достаточно больших возможно пренебречь величинами ε_s^n, ε_s^ν, ε_σ^ν; тогда получим простые приближенные расчетные формулы для давлений в отдельных скважинах системы N взаимодействующих конфокальных эллиптических батарей. Соответствующие зависимости, ввиду их очевидности, здесь не приводятся. При $\varepsilon_s=0$ семейство конфокальных эллипсов вырождается в семейство концентричных окружностей; в этом случае при $\nu=n=\text{const}$ получаем формулы, известные для круговых батарей скважин.

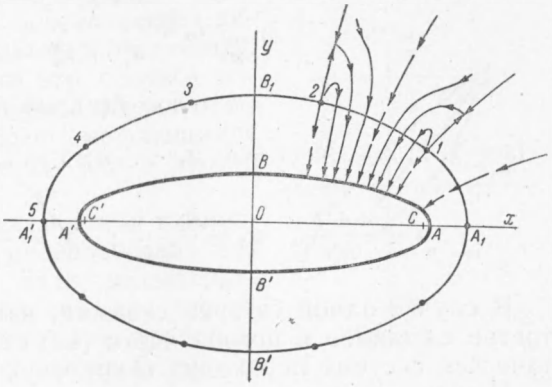


Рис. 3

2. Для технологии нефтедобычи представляет интерес также следующая задача. Пусть на основной плоскости z эллипс с полуосями a и b рассматривается как эксплуатационная галерея, на которой задано постоянное давление p^* (рис. 3). На внешности этого эллипса имеется семейство N конфокальных эллиптических батарей скважин. Перенумеруем все батареи, начиная счет с батареи, ближайшей к галерее с внешней стороны, тогда s-я батарея имеет полуоси a_s и b_s. Пусть батарея с номером s имеет n скважин (n четное), расположенных симметрично относительно главных осей, таким образом, сохраняется зависимость (1). Все скважины — совершенные с одинаковым рабочим радиусом r_0; пласт всюду однороден, характеризуется проницаемостью $k=\text{const}$; пластовая жидкость несжимаема с вязкостью $\mu=\text{const}$. Все скважины s-й батареи имеют одинаковый дебит q_s. Так же как и в задаче 1, допускаем, что известно среднее пластовое давление p_1 на круговом контуре радиуса r_1. При данных условиях требуется найти распределение давлений в отдельных скважинах эллиптических батарей, а также расход пластовой жидкости на галерее.

На новой вспомогательной плоскости комплексного переменного ζ теперь определяем комплексный потенциал

$$w(\zeta)=\varphi+i\psi=A\ln\frac{\zeta}{R}+\sum_{(s)}A_s\ln\frac{\zeta^n-R_s^n}{R_s^n-R^{2n}/\zeta^n}+B\quad(s=1,2,\ldots,N), \quad (9)$$

где положено:

$$R=\tfrac{1}{2}(a+b);\quad R_s=\tfrac{1}{2}(a_s+b_s);\quad d^2=\tfrac{1}{4}(a^2-b^2)=\tfrac{1}{4}(a_s^2-b_s^2); \quad (10)$$

A, A_s, B — постоянные, определяемые по граничным условиям на основании формул (2), (3), (4) статьи [2].

На окружности $|\zeta| = R$ потенциал $\varphi = -kp/\mu$ принимает постоянное значение, поэтому, используя отображение (4), найдем интересующий нас потенциал $w(z)$, определенный в области D^*, границей которой и является эллиптическая галерея с полуосями a, b (рис. 3), в которую перейдет окружность радиуса $R > d$ на плоскости ζ. Положение отдельных скважин в батареях по прежнему определяется формулами (6).

Для данной задачи тем же способом получим основные зависимости:

$$2\pi \frac{k}{\mu}(p_1 - p^*) = q \ln \frac{1}{\alpha} + \sum_{(s)} q_s \ln \frac{1}{\alpha_s^n}; \tag{11}$$

$$2\pi \frac{k}{\mu}(p_1 - p_{st}) = q \ln \frac{1}{\alpha_s} + q_s \ln \frac{R_s(1-\beta_s^{2n})}{n\alpha_s^n r_0} \sqrt{1 - 2\varepsilon_s \cos\frac{4\pi t}{n} + \varepsilon_s^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{(\sigma)}{}' q_\sigma \ln \frac{1 + \beta_s^{2\nu}\beta_\sigma^{2\nu} - 2\beta_s^\nu \beta_\sigma^\nu \cos\frac{2\pi\nu t}{n}}{\alpha_s^{2\nu} + \alpha_\sigma^{2\nu} - 2\alpha_s^\nu \alpha_\sigma^\nu \cos\frac{2\pi\nu t}{n}}, \tag{12}$$

$$n = f(s),\ \nu = f(\sigma)$$

$(s = 1, 2, \ldots, N;\ t = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s-1,\ s+1, \ldots, N)$;

$$\alpha = \frac{a+b}{2r_1};\quad \alpha_s = \frac{a_s + b_s}{2r_1};\quad \beta_s = \frac{a+b}{a_s+b_s};\quad \varepsilon_s = \frac{a_s - b_s}{a_s + b_s}. \tag{13}$$

В случае одной батареи скважин, взаимодействующих с галереей, третье слагаемое в правой части (12) отсутствует. При $\varepsilon_s = 0$ эллиптическая система переходит в круговую.

При частных предположениях относительно величин (13) возможны дальнейшие вполне очевидные упрощения зависимости (12); здесь они не рассматриваются.

Некоторые из этих упрощенных зависимостей ($\varepsilon_s = 0$, $\beta_s \approx 0$) либо известны [1], либо исправляют известные результаты.

Соответствующие решения в случаях шахматного расположения скважин в соседних батареях получаются на основе (8) и (12).

Московский институт инженеров водного хозяйства
им. В. Р. Вильямса

Поступило
3 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Крылов и др., Научные основы разработки нефтяных месторождений, 1948. [2] В. П. Пилатовский, ДАН, 93, № 3 (1953).