Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О П-РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 IV 1955)

§ 1. В работе (1) нами было введено понятие композиционного блока конечной группы, причем было доказано, что всякому делителю h порядка g конечной группы $\mathfrak{G}$, являющемуся композиционным блоком или произведением нескольких композиционных блоков группы $\mathfrak{G}$, соответствует по крайней мере одна подгруппа порядка h из $\mathfrak{G}$. Полученные при этом результаты включали в себя как частные случаи известные теоремы Ф. Голла (силовские системы разрешимых групп) и Шура (факторизационная теорема).

В настоящей статье указываются новые случаи делителей порядка конечной группы, которым в группе соответствуют подгруппы, разрешимые относительно определенного множества П простых делителей их порядков. Класс относительно разрешимых групп или П-разрешимых групп, введенный в рассмотрение нами в 1946 г. в работе (2), в дальнейшем исследовался нами в статьях (3,4). При этом нами было показано (теоремы 2 и 3 работы (4)), что если порядок g П-разрешимой группы $\mathfrak{G}$ имеет вид $g = ab$, где b — наибольший из всех тех делителей g, все простые делители которых входят в П, то $\mathfrak{G}$ имеет подгруппу $\mathfrak{A}$ порядка a и разрешимую подгруппу $\mathfrak{B}$ порядка b, причем все подгруппы порядка a из $\mathfrak{G}$ сопряжены с $\mathfrak{A}$, а все подгруппы порядка b из $\mathfrak{G}$ сопряжены с $\mathfrak{B}$; кроме того было установлено, что всякая подгруппа порядка a', делящего a, входит в некоторую подгруппу порядка a, а всякая подгруппа порядка b', делящего b, входит в некоторую подгруппу порядка b.

Отметим здесь попутно, что частные случаи теорем 2 и 3 нашей работы (4) 1950 г. были повторно рассмотрены в 1952 г. Нобору Ито (5) (теоремы 2 и 3 в предположении справедливости так называемой гипотезы Цассенхауса) и в 1954 г. Ф. Голлом (6) (теорема 2 для случая, когда П содержит только одно простое число, т. е. для случая p-разрешимости группы).

Среди результатов настоящей работы отметим приводимую ниже теорему 3, представляющую обобщение и объединение ряда известных теорем о существовании подгрупп у конечной группы (см. об этом § 3).

§ 2. Приведем полученные нами результаты, дополняющие и развивающие теорему 1 работы (1).

Теорема 1. *Пусть* $h = m_1 m_2 \dots m_\nu$, $\nu \geqslant 1$, *где* $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ — *некоторые композиционные блоки конечной группы* $\mathfrak{G}$, *и пусть* П — *некоторое такое непустое множество простых чисел, что в множество всех различных простых делителей каждого из композиционных блоков* $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ *входит не более одного простого числа из* П. *Тогда любая подгруппа порядка* h *группы* $\mathfrak{G}$ *будет являться* П-*отделимой группой.*

Теорема 2. *Пусть* $s > 1$ *является таким делителем порядка* g *группы* $\mathfrak{G}$, *что* $(s, g/s) = 1$, *причем множество всех различных про-*

стых делителей каждого композиционного блока $\mathfrak{G}$ *содержит не более одного простого делителя* s. *Тогда группа* $\mathfrak{G}$ *имеет по крайней мере одну разрешимую подгруппу порядка* s *и все подгруппы порядка* s *группы* $\mathfrak{G}$ *сопряжены в* $\mathfrak{G}$.

Определение. Делитель h порядка g группы $\mathfrak{G}$ назовем цельноблочным, если он или равен единице, или является композиционным блоком или произведением каких-либо нескольких композиционных блоков $\mathfrak{G}$.

Делитель s порядка g группы $\mathfrak{G}$ назовем отделимым, если он или равен единице, или если $(s, g/s) = 1$ и $\mathfrak{G}$ является $\Pi(s)$-отделимой, где $\Pi(s)$ — множество всех различных простых делителей числа s.

Теорема 3. *Если* $(h, s) = 1$ *и* h *— некоторый цельноблочный, а* s *— некоторый отделимый делители порядка* g *группы* $\mathfrak{G}$, *то* $\mathfrak{G}$ *имеет по крайней мере одну подгруппу порядка* hs, *которая при* $s > 1$ *будет* $\Pi(s)$*-разрешимой.*

Доказательство теоремы 3 проводится комбинированием схемы доказательства теоремы 1 работы [1] с использованием теоремы 4 статьи [7] (или теоремы 9 работы [8]) и нашей основной теоремы о П-отделимых группах [9].

Отметим еще следующий частный случай теоремы 3, представляющий известный самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Пусть* h *является некоторым цельноблочным делителем порядка* g *группы* $\mathfrak{G}$ *и пусть еще* $s > 1$ *— некоторый такой делитель* g, *что* $(s, g/s) = 1$ *и множество всех различных простых делителей каждого композиционного блока* $\mathfrak{G}$ *содержит не более одного простого делителя* s. *Если* $(h, s) = 1$, *то* $\mathfrak{G}$ *имеет по крайней мере одну* $\Pi(s)$*-разрешимую подгруппу порядка* hs.

§ 3. Сделаем еще следующее замечание относительно теоремы 3. При $s = 1$ она, очевидно, превращается в теорему 1 работы [1]. Но в § 6 работы [1] мы показали, что в теореме 1 работы [1], как ее частные случаи, содержатся факторизационная теорема Шура и теорема Ф. Голла о существовании подгрупп у разрешимых групп.

С другой стороны, при $h = 1$ теорема 3 превращается в нашу основную теорему о существовании подгрупп у П-отделимых групп [9], частным случаем которой является классическая теорема Силова о существовании подгрупп у конечных групп.

Таким образом, теорема 3 является объединением и обобщением указанных теорем Силова, Ф. Голла, Шура и С. А. Чунихина о существовании подгрупп у конечных групп.

Доказательство гипотезы Цассенхауса, очевидно, приведет к аналогичной объединяющей теореме о сопряженности подгрупп.

§ 4. Отметим еще следующий результат, получающийся как следствие теорем 1 и 8 работы [1].

Назовем конечную группу одноблочной, если число ее композиционных блоков равно единице.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Всякая группа* $\mathfrak{G}$ *порядка* $g = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, *где* p, q *и* r *— различные простые числа и* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, *является или одноблочной или разрешимой.*

Белорусский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
30 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, ДАН, **97**, № 6 (1954). [2] С. А. Чунихин, ДАН, **55**, № 6. (1947). [3] С. А. Чунихин, Матем. сборн., **25** (67), № 3 (1949). [4] С. А. Чунихин, ДАН, **73**, № 1 (1950). [5] Noboru Itô, Tôhoku Math. J., **4**, No. 1, 172 (1952). [6] P. Hall, Proc. Lond. Math. Soc., (3) 4, No. 15, 343 (1954). [7] С. А. Чунихин, ДАН, **86**, № 1 (1952). [8] С. А. Чунихин, Матем. сборн., **33** (75), № 1 (1953). [9] С. А. Чунихин, ДАН, **59**, № 3 (1948).