Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. А. РЫМАРЕНКО

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА С. Н. БЕРНШТЕЙНА В ТЕОРИИ МОНОТОННЫХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 IV 1955)

В настоящей заметке сообщаются две теоремы о монотонных полиномах, аналогичные теореме С. Н. Бернштейна (1) о неотрицательных тригонометрических многочленах, а также указывается применение этих теорем к некоторым экстремальным задачам.

Будем рассматривать полиномы

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \tag{1}$$

степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами, монотонно возрастающие на отрезке $[-1, +1]$ (класс таких полиномов назовем T_n) или на всей вещественной оси (класс этих полиномов B_n), коэффициенты которых подчинены нескольким допустимым (т. е. не противоречащим монотонности и совместным) линейным связям

$$Q_j(y_n) \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i \alpha_{i,j} = A_j \quad (j = 1, 2, \ldots; s \leqslant n), \tag{2}$$

где $\alpha_{i,j}$ и A_j — данные вещественные числа, причем хоть одно $A_j \neq 0$.

Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть полиномы* $y_n(x) \in T_n$ *и пусть их коэффициенты подчинены одной связи* (2) (*причем предполагается, что* $y_n(-1) = 0$, *если* $\alpha_{0,1} \neq 0$). *Тогда среди этих полиномов существует экстремальный* (*т. е. имеющий наименьшую осцилляцию на отрезке* $[-1, +1]$) *полином вида*

$$y_n^*(x) = \int_{-1}^{x} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} U_m^2(x)\,dx, \tag{3}$$

где $U_m(x)$ — *некоторый полином степени* $\leqslant m$ ($n - 1 = 2m + \alpha + \beta$), *все корни которого лежат в промежутке* $[-1, +1]$, *а* α *и* β — *числа, равные* 0 *или* 1.

Теорема 2. *Пусть полиномы* $y_n(x) \in B_n$ *и их коэффициенты связаны двумя зависимостями* (2) (*дополнительно предполагаем, что* $y_n(-1) = 0$, *если* $\begin{vmatrix} \alpha_{0,1} & A_1 \\ \alpha_{0,2} & A_2 \end{vmatrix} = 0$, *а хоть одно число* $\alpha_{0,j} \neq 0$). *Тогда среди этих полиномов существует экстремальный на* $[-1, +1]$ *полином вида*

$$y_n^*(x) = \int_{-1}^{x} U_m^2(x)\,dx, \tag{4}$$

где $U_m(x)$ — *некоторый полином степени* $\leqslant m$ $(n = 2m + 1)$ *с вещественными корнями.*

В указанных теоремах единственность экстремальных полиномов (3) или (4) не утверждается.

Эти теоремы применим к решению следующих задач.

Задача 1. Дано:

$$K_1 y_n'(1) + K_2 y_n''(1) = A \tag{5}$$

для $y_n(x) \in T_n$ (K_1, K_2 и A — данные вещественные числа, причем $AK_2 \geqslant 0$). Найти наименьшую на $[-1, +1]$ осцилляцию $L_{y_n^*}$ этих полиномов.

Задача 2. Пусть

$$y_n(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i x^i \in B_n, \quad \frac{y_n''(\eta)}{y_n'(\eta)} = A \tag{6}$$

(η и A — данные вещественные числа). Требуется найти наименьшую на $[-1, +1]$ осцилляцию $L_{y_n^*}$ этих полиномов.

В первой задаче производную экстремального полинома $y_n^{*\prime}(x)$ можно искать (согласно теореме 1) в форме $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta U_m^2(x)$ (α, β и $U_m(x)$ те же, что в теореме 1).

Ограничимся, для определенности, нечетным n (n четное не будем здесь рассматривать, так как все вычисления проводятся совершенно аналогично). Тогда легко видеть, что $\alpha = \beta = 1$ не может иметь места, ибо $K_2 A \geqslant 0$, значит, $\alpha = \beta = 0$. Поэтому, разлагая полином $U_m(x)$ по нормированным полиномам Лежандра:

$$U_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \hat{P}_k(x),$$

найдем

$$L_{y_n} = \sum_{i=0}^{m} a_i^2, \tag{7}$$

$$K_1 \Big[\sum_{i=0}^{m} a_i \hat{P}_i(1)\Big]^2 + 2K_2 \Big[\sum_{i=0}^{m} a_i \hat{P}_i(1)\Big] \cdot \Big[\sum_{i=0}^{m} a_i \hat{P}_i'(1)\Big] = A. \tag{5'}$$

Следовательно, задача сведется к обращению в минимум $\sum_{i=0}^{m} a_i^2$ при условии (5'). Решение этой задачи таково:

$$L_{y_n^*} = \frac{4BA}{m^2 (m+1)^2 (m+2)^2 K_2^2} \times$$

$$\times \Big[\sqrt{K_1^2 + m(m+2) K_1 K_2 + \frac{m^2 (m+2)^2}{3} K_2^2} - \Big(K_1 + \frac{m(m+2)}{2} K_2\Big)\Big]. \tag{8}$$

Условие $K_2 A \geqslant 0$ можно отбросить; но тогда необходимо найти осцилляцию L для случая $\alpha = \beta = 1$ (для чего полином $U_m(x)$ надо было бы разложить по нормированным полиномам Якоби с весом $(1-x^2)$) и, сравнив ее с L, полученной по формуле (8), выбрать наименьшую. Этого здесь мы не делаем во избежание излишней громоздкости.

Частным случаем формулы (8) являются формулы С. Н. Бернштейна (1) (при $K_2 = 0$) и В. Ф. Бржечка (3) (при $K_1 = 0$).

Экстремальный полином второй задачи можно искать (согласно теореме 2) в форме

$$y_n^*(x) = \int_{-1}^{x} U_m^*(x)\,dx.$$

Разлагая $U_m(x)$, так же как в первой задаче, по нормированным полиномам Лежандра: $U_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \hat{P}_i(x)$, учитывая условие (6) и то, что старший коэффициент искомого полинома $y_n^*(x)$ равен 1, после аналогичных вычислений найдем:

$$L_{y_n^*} = 2^{2m+1} \frac{(m!)^4}{[(2m)!]^2} \frac{2m+1}{2m-1} M^2, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} M^2 = \{&[(m+2)^2 \hat{P}'^2(\eta) + (1-\eta^2)\,\hat{P}''^2_m(\eta)]\,A^2 - \\ &- 3\,[(m+1)(m+2)\,\hat{P}_m(\eta)\,\hat{P}'_m(\eta) + (1-\eta^2)\,\hat{P}'_m(\eta)\,\hat{P}''_m(\eta)]\,A + \\ &+ 3\,[(m+1)^2 \hat{P}_m^2(\eta) + (1-\eta^2)\hat{P}'^2_m(\eta)]\} \times \\ &\times \{[(m+1)^2\,\hat{P}'^2_{m-1}(\eta) + (1-\eta^2)\,P''^2_{m-1}(\eta)]\,A^2 + \\ &+ 3\,[m(m+1)\,\hat{P}_{m-1}(\eta)\,\hat{P}'_{m-1}(\eta) + (1-\eta^2)\hat{P}'_{m-1}(\eta)\hat{P}''_{m-1}(\eta)]\,A + \\ &+ 3[m^2 \hat{P}_m^2(\eta) + (1-\eta^2)\hat{P}'^2_{m-1}(\eta)]\}^{-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Интересно отметить, что, если η не является корнем полинома Лежандра m-й степени $\hat{P}_m(x)$, то

$$L_n \equiv \inf_A L_{y_n^*} = 2^{2m+1} \frac{(m!)^4}{[(2m)!]^2},$$

что соответствует $A = \hat{P}'_m(\eta) / \hat{P}_m(\eta))$ и совпадает с $\inf_{\sigma_1, \sigma_2} L_{y_n^*}$ в задаче I ([4]); если же $\hat{P}_m(\eta) = 0$, то не существует такой величины A, для которой $L_{y_n^*}$ (формулы (9) и (10)) имела бы наименьшее значение.

Кроме рассмотренных задач, указанные теоремы могут быть с успехом применены в задачах II и III ([4]) и других аналогичных задачах, где ранее применялась известная теорема А. А. Маркова — Люкача о неотрицательных полиномах, приводящая к более сложным вычислениям.

Отметим также, что если число связей (2) более одной для $y_n(x) \in T_n$ и более двух для $y_n(x) \in B_n$, то теоремы настоящей заметки могут не иметь места (см. задачу I ([4]) и ([5])).

Поступило
5 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., I, № 44, 1952. [2] С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extremales, Paris, 1926. [3] В. Ф. Бржечка, Тр. Харьковск. мех.-машиностр. инст., 9, в. 1 (1948). [4] Б. А. Рымаренко, ДАН, 71, № 6 (1950). [5] С. Н. Бернштейн, В. Ф. Бржечка, Б. А. Рымаренко, Сообщ. Харьковск. матем. общ., сер. 4, 3 (1929).