Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. Н. РАХМАНОВ

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 IV 1955)

§ 1. Пусть K — класс функций $w = f(z)$, однолистных, регулярных в $|z|<1$ и отображающих круг $|z|<1$ на выпуклые области плоскости w. Пусть, кроме того, функции этого класса нормированы, т. е.

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1.$$

Как было доказано ранее (1), функции $\Phi_1(z)=\frac{1}{2}[f(z)+zf'(z)]$ однолистны в $|z|<1$, если $f(z)\in K$. Назовем функции $\Phi_1(z)$ этого класса функциями класса $K+S$.

Теорема 1. *Если функция* $\Phi_1(z)\in K+S$, *то справедлива оценка*

$$|\arg \Phi_1'(z)| \leqslant 3 \arcsin r, \quad r=|z|.$$

Оценка эта точная, достигается функцией

$$\Phi_0(z)=\frac{z(2-z)}{2(1-z)^2}$$

класса $K+S$ *вдоль кривой* $\cos\varphi = r$, $z=re^{i\varphi}$.

Доказательство основано на применении структурной формулы для функции $f(z)\in K$ (2).

Теорема 2. *Если функция* $\Phi_1(z)\in K+S$, *то справедливы оценки*

$$\left.\begin{aligned} r &\leqslant \frac{1}{2}\frac{2+r}{2(1+r)^2} \\ r &\geqslant \frac{1}{2}\frac{3-2r-4r^2+2r^3}{2(1-r^2)^2} \end{aligned}\right\} \leqslant R\frac{\Phi_1(z)}{z} \leqslant \frac{2-r}{2(1-r)^2}.$$

Оценка сверху и оценка снизу при $r\leqslant \frac{1}{2}$ *точные, достигаются функцией* (1).

Доказательство строится на основе получения подобных же оценок для функции $F(z)=zf'(z)$, $f(z)\in K$, при помощи неравенства, полученного Г. М. Голузиным:

$$R\left[\frac{F(z)}{z}\right]^{1/2} \geqslant \frac{1}{2} \quad (3).$$

Теорема 3. *Если функция* $\Phi_1(z)\in K+S$,

$$\Phi_1(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots,$$

то любой отрезок $S_n(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ *этой функции при* $n\geqslant 11$ *однолистен в круге* $|z|<1-3\frac{\ln n}{n}$.

Доказательство проводится методом Л. Илиева (4).

Теорема 4. *Если функция* $\bar{\Phi}_1(z) \in K+S$, *то любой ее отрезок* $S_n(z)$ *при* $n \geqslant 9$ *не имеет нулей (кроме* $z=0$*) в круге* $|z|<1-2\frac{\ln n}{n}$.

§ 2. Теорема 5. *Если функция* $f(z) \in K$, *то функция*

$$\Phi_2(z)=\frac{1}{(c+1)e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}[(c+1)f(e^{i\alpha}z)-f(e^{-i\alpha}z)], \quad c\geqslant 0, \quad 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},$$

однолистна в $|z|<1$.

Доказательство следует из геометрических соображений и теоремы 5 автора ([5]). При $c=0$ получаем уже известный результат ([1]). К функции можно применить обобщение, указанное недавно В. А. Зморовичем ([6]).

Следствие. Если функция $f(z) \in K$ и $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$, то функция

$$\Phi_2^*(z)=z+\frac{c}{c+2}a_2z^2+a_3z^3+\frac{c}{c+2}a_4z^4+\ldots, \quad c\geqslant 0,$$

однолистна в $|z|<1$.

Пусть функция

$$F(z)=\frac{1}{z}+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\ldots$$

однолистна и регулярна в $|z|<1$ за исключением простого полюса при $z=0$ и отображает круг $|z|<1$ на область, дополнение к которой есть выпуклая область. Функции, удовлетворяющие этим условиям, будем считать принадлежащими к классу (Σ_b).

Теорема 6. *Если функция* $F(z) \in \Sigma_b$, *то функция*

$$\Phi_3(z)=\frac{1}{(c+1)e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}[(c+1)F(e^{i\alpha}z)-F(e^{-i\alpha}z)],$$

$$c\geqslant 0, \quad 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},$$

однолистна в $|z|<1$.

Следствие. Если функция $F(z) \in \Sigma_b$, то функция

$$\Phi_3^*(z)=\frac{1}{z}+\alpha_1z+\frac{c}{c+2}\alpha_2z^2+\alpha_3z^3+\frac{c}{c+2}\alpha_4z^4+\ldots, \quad c\geqslant 0,$$

однолистна в $|z|<1$

§ 3. Теорема 7. *Если функция* $\varphi(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots$ *регулярна в* $|z|<1$ *и для нее справедливо неравенство*

$$\left|\arg\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2n}, \quad n=1,2\ldots, \quad |z|<1,$$

то функция $\varphi(z)$ *однолистна в* $|z|<1$ *и*

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/n}\leqslant R\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\leqslant\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/n},$$

$$\left|\arg\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\leqslant\frac{2}{n}\operatorname{arc\,tg}r,$$

$$r\exp\int_0^r\frac{1}{x}\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/n}-1\right]dx\leqslant|\varphi(z)|\leqslant r\exp\int_0^r\frac{1}{x}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/n}-1\right]dx,$$

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/n}\exp\int_0^r\frac{1}{x}\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/n}-1\right]dx\leqslant|\varphi'(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/n}\exp\int_0^r\frac{1}{x}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/n}-1\right]dx;$$

радиус выпуклости функций этого семейства есть наименьший положительный корень уравнения

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/n}-\frac{2r}{n(1-r^2)}=0.$$

Доказательство основано на использовании леммы Шварца. Радиус выпуклости находится при помощи леммы, указанной Г. М. Голузиным ([7]). Все эти оценки точные, достигаются функцией

$$\varphi_0(z)=z\exp\int_0^z\frac{1}{x}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/n}-1\right]dx.$$

Эти результаты можно распространить и на регулярные в $|z|<1$ симметричные функции

$$\varphi(z)=z+c_{s+1}z^{s+1}+c_{2s+1}z^{2s+1}+\ldots,$$

удовлетворяющие условию

$$\left|\arg\frac{z\varphi_s'(z)}{\varphi_s(z)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2n},\quad n=1,2,\ldots,\quad |z|<1.$$

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
12 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Рахманов, ДАН, 78, № 2 (1951). [2] В. А. Зморович, ДАН, 72, № 5 (1950). [3] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 3, в. 2 (1938). [4] Л. Илиев, ДАН, 70, № 1 (1950). [5] Б. Н. Рахманов, ДАН, 82, № 3 (1952). [6] В. А. Зморович, Усп. матем. наук, 9, в. 4 (62) (1954). [7] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 42, № 2 (1935).