Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

О ЗАМКНУТОСТИ НОМОГРАФИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 IV 1955)

Пусть

$$F(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2; t_3, \tau_3) = 0 \tag{1}$$

некоторое невырожденное, аналитическое в области G уравнение, допускающее A-множитель

$$\psi(t, \tau) = \psi_1(t_2, \tau_2; t_3, \tau_3) \cdot \psi_2(t_3, \tau_3; t_1, \tau_1) \cdot \psi_3(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2) \tag{2}$$

так, что для аналитической функции $\Phi(t, \tau)$, отличной от тождественного нуля, имеет место тождество

$$\Phi(t, \tau) = \psi(t, \tau) \cdot F(t, \tau) = |f_{i1}(t_i, \tau_i); f_{i2}(t_i, \tau_i); f_{i3}(t_i, \tau_i)|. \tag{3}$$

Две функции $\Psi(t, \tau)$ и $\overline{\Psi}(t, \tau)$, аналитических в G или мероморфных, назовем эквивалентными:

$$\Psi(t, \tau) \backsim \overline{\Psi}(t, \tau), \tag{4}$$

если они отличаются лишь не равным тождественному нулю произведением множителей, из которых каждый зависит только от одной пары переменных (t_i, τ_i), т. е. если

$$\overline{\Psi}(t, \tau) = \Psi_1(t_1, \tau_1) \cdot \Psi_2(t_2, \tau_2) \cdot \Psi_3(t_3, \tau_3) \cdot \Psi(t, \tau). \tag{5}$$

В частности, функцию ψ_i, входящую в состав A-множителя (3), будем называть тривиальной, если она эквивалентна постоянной (единице).

Два уравнения $\Psi(t, \tau) = 0$ и $\overline{\Psi}(t, \tau) = 0$ также назовем эквивалентными, если таковы левые их части; каждая из анаморфоз одного из этих уравнений является, очевидно, анаморфозой и другого.

Покажем, что если уравнение (1) является алгебраичным относительно, хотя бы, переменной t_1, то с точностью до эквивалентности все его анаморфозы (3) будут также алгебраичны по t_1.

Это почти очевидно для того случая, когда произведение $\psi_2 \cdot \psi_3$ в (2), содержащее переменную t_1, тривиально, т. е. когда допускает прямую анаморфозу M-функция $\Phi(t, \tau) = \psi_1 \cdot F(t, \tau)$. Как известно (1), размерность уравнения (1) по (t_1, τ_1) в данном случае равна 3 или 2.

Если

$$F(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\eta} F_k^{(00)} \cdot f_{1k}(t_1, \tau_1) = 0, \tag{6}$$

где $F_k^{(00)} = F_k(t_2, \tau_2; t_3, \tau_3)$ есть какое-либо базисное по (t_1, τ_1) разложение уравнения (1), то всегда существует неособенное проективное преобразование, проводящее любую анаморфозу (3) M-функции $\Phi(t, \tau)$ в такую, где элементы первой строки, отличные от нуля, суть функции $f_{1k}(t_1, \tau_1)$ базисного разложения (6) ([1,2]). Но за элементы f_{1k} можно принять любые r линейно независимых функций семейства $F^{(0jk)} = F(t_1, \tau_1; t_{2j}, \tau_{2j}; t_{3k}, \tau_{3k})$, если r — максимальное число таких функций ([2]).

Отсюда следует, что элементы первой строки анаморфозы (3) уравнения (1), допускающего A-множитель ψ_1, будут являться линейными формами частных значений $F^{(0jk)}$ функции $F(t, \tau)$.

Лемма 1. *Если уравнение* (1) *допускает* A*-множитель* (3), *в котором лишь одна из функций* ψ_2, ψ_3, *содержащих переменные* (t_1, τ_1), *отлична от тривиальной, то элементы первой строки анаморфозы* (3) *являются квадратичными формами частных значений* $F^{(0jk)}$ *функции* $F(t, \tau)$.

Пусть, хотя бы, ψ_3 не тривиальна (а $\psi_2 \backsim 1$) и базисное по (t_3, τ_3) разложение уравнения $\overline{F}(t, \tau) = 0$ имеет вид

$$\overline{F}(t, \tau) = \psi_1 \cdot F(t, \tau) = \sum_{k=1}^{n} \psi_1^{(0k)} \cdot F_k^{(00)} \cdot f_{3k}(t_3, \tau_3) = 0. \tag{7}$$

Здесь, как и в дальнейшем,

$$\psi_1^{(jk)} = \psi_1(t_{2j}, \tau_{2j}; t_{3k}, \tau_{3k}), \quad F_k^{(ji)} = F_k(t_{1j}, \tau_{1j}; t_{2i}, \tau_{2i}), t_{l0} = t_l, \tau_{l0} = \tau_l.$$

Возможны, очевидно, два случая: $r = 3$, $r = 2$.

Применяя при $r = 3$ к уравнению $\overline{F}(t, \tau) = 0$ условия анаморфозы при помощи A-множителя ψ_3 ([3]), найдем, что элементы первой строки анаморфозы (3) будут равны адъюнктам определителя

$$|\psi_1^{(i1)} F_1^{(0i)}; \psi_1^{(i2)} F_2^{(0i)}; \psi_1^{(i3)} F_3^{(0i)}| \quad (i = 1, 2, 0), \tag{8}$$

отвечающим элементам последней строки, т. е.

$$\rho x_1 = \begin{vmatrix} \psi_1^{(12)} F_2^{(01)} & \psi_1^{(13)} F_3^{(01)} \\ \psi_1^{(22)} F_2^{(02)} & \psi_1^{(23)} F_3^{(02)} \end{vmatrix}; \quad \rho x_2 = \begin{vmatrix} \psi_1^{(13)} F_3^{(01)} & \psi_1^{(11)} F_1^{(01)} \\ \psi_1^{(23)} F_3^{(02)} & \psi_1^{(21)} F_1^{(02)} \end{vmatrix};$$

$$\rho x_3 = \begin{vmatrix} \psi_1^{(11)} F_1^{(01)} & \psi_1^{(12)} F_2^{(01)} \\ \psi_1^{(21)} F_1^{(02)} & \psi_1^{(22)} F_2^{(02)} \end{vmatrix}; \tag{9}$$

в этом случае лемма доказана, так как $\psi_1^{(ik)}$ — постоянные.

При $r = 2$ достаточно заменить в выражениях (9) функцию $\psi_1^{(i3)} F_3^{(0i)}$ через $a_i \psi_1^{(i1)} F_1^{(0i)} + b_i \psi_1^{(i2)} F_2^{(0i)}$, где a_i, b_i $(i = 1, 2)$ — некоторые константы ([2]), и справедливость леммы будет также ясна.

Лемма 2. *Если уравнение* (1) *допускает* A*-множитель* (2), *в котором обе функции* ψ_2 *и* ψ_3, *содержащие переменные* (t_1, τ_1), *отличны от тривиальных, то каждый из элементов первой строки анаморфозы* (3) *является отношением двух квадратичных форм от частных значений* $F^{(0jk)}$ *функции* $F(t, \tau)$, *если только размерность* $\Phi(t, \tau)$ (3) *равна* 3 *в отношении по меньшей мере одной из пар* (t_2, τ_2), (t_3, τ_3).

Пусть размерность $\Phi(t, \tau)$ равна 3 по (t_3, τ_3) и

$$\overline{F}(t, \tau) = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot F(t, \tau) = \sum_{k=1}^{3} \psi_1^{(0k)} \cdot \psi_2^{(k0)} \cdot F_k^{(00)} \cdot f_{3k}(t_3, \tau_3) = 0 \tag{10}$$

базисное по (t_3, τ_3) разложение уравнения $\overline{F}(t, \tau) = 0$, допускающего, очевидно, простой A-множитель ψ_3. Условия анаморфозы дают [3]

$$|\psi_1^{(i1)}\psi_2^{(01)}F_1^{(0i)} \quad \psi_1^{(i2)}\psi_2^{(20)}F_2^{(0i)} \quad \psi_1^{(i3)}\psi_2^{(30)}F_3^{(0i)}| = 0 \quad (i = 1, 2, 0); \tag{11}$$

$$|\psi_1^{(01)}\psi_2^{(1i)}F_1^{(i0)} \quad \psi_1^{(02)}\psi_2^{(2i)}F_2^{(i0)} \quad \psi_1^{(03)}\psi_2^{(3i)}F_3^{(i0)}| = 0 \quad (i = 1, 2, 0). \tag{12}$$

Определяя из (11) уравнения бинарного поля (шкалы) переменных (t_1, τ_1), имеем

$$\rho x_1 = \frac{B_{11}}{\psi_2^{(10)}}; \quad \rho x_2 = \frac{B_{12}}{\psi_2^{(20)}}; \quad \rho x_3 = \frac{B_{13}}{\psi_2^{(30)}}, \tag{13}$$

где $B_{1k} = B_{1k}(t_1, \tau_1)$ — квадратичные формы, входящие в выражения (9).

Остается показать, что за функции $\psi_2^{(k0)}$ могут быть взяты также квадратичные формы от $F^{(0jk)}$. Но это следует из разложения по элементам последней строки тождества (12)

$$\sum_{k=1}^{3} \psi_2^{(k0)} \cdot A_{2k}^{(0)} \cdot F_k^{(00)} = 0, \tag{12'}$$

где $A_{2k}^{(0)} = A_{2k}(t_2, \tau_2)$ — адъюнкты (12), освобожденные от множителей $\psi_1^{(0k)}$. Полагая $t_2 = t_{2i}$, $\tau_2 = \tau_{2i}$ $(i = 3, 4)$, найдем из полученных тождеств нужные выражения для $\psi_2^{(k0)}$ через квадратичные формы от $A_{2k}^{(i)}F_k^{(0i)}$ $(i = 3, 4)$.

Лемма 3. *Если при условии леммы* 2 *размерность* $\Phi(t, \tau)$ *равна* 2 *в отношении каждой пары переменных* (t_2, τ_2), (t_3, τ_3), *то в уравнении бинарного поля (шкалы) переменных* (t_1, τ_1) *координаты* ρx_k *— квадратичные формы функций* $\psi_2^{(k0)}F_k^{(0i)}$ $(i, k = 1, 2)$, *где* $\psi_2^{(k0)}$ *— кубичные формы частных значений* $F^{(0ik)}$ $(i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$ *функции* $F(t, \tau)$.

Лемма следует из условий анаморфозы при помощи A-множителя ψ_3 уравнения

$$\overline{F}(t, \tau) = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot F(t, \tau) = \sum_{k=1}^{2} \psi_1^{(0k)} \cdot \psi_2^{(k0)} \cdot F_k^{(00)} \cdot f_{3k}(t_3, \tau_3) = 0. \tag{14}$$

Именно, из тождества

$$|\psi_1^{(i1)}\psi_2^{(10)}F_1^{(0i)} \quad \psi_1^{(i2)}\psi_2^{(20)}F_2^{(0i)} \quad a_i\psi_1^{(i1)}\psi_2^{(10)}F_1^{(0i)} + b_i\psi_1^{(i2)}\psi_2^{(20)}F_2^{(0i)}| = 0$$
$$(i = 1, 2, 0) \tag{15}$$

найдется нужное выражение для ρx_k; функции $\psi_2^{(k0)}$ $(k = 1, 2)$ найдутся из условия

$$|\psi_1^{(01)}\psi_2^{(1k)}F_1^{(k0)} \quad \psi_1^{(02)}\psi_2^{(2k)}F_2^{(k0)} \quad a_k\psi_1^{(01)}\psi_2^{(1k)}F_1^{(k0)} + b_k\psi_1^{(02)}\psi_2^{(2k)}F_2^{(k0)}| = 0$$
$$(k = 3, 4, 0), \tag{16}$$

в котором функция $F_3^{(00)} = a_0\psi_1^{(01)}\psi_2^{(10)}F_1^{(00)} + b_0\psi_1^{(02)}\psi_2^{(20)}F_2^{(00)}$ исключена при помощи тождества (15).

Из рассмотренных лем вытекает:

Теорема. *Если уравнение* (1) *алгебраическое по* t_1, *то таковы же с точностью до эквивалентности и уравнения бинарных полей (шкал) переменных* (t_1, τ_1) *в любой его анаморфозе.*

Следствие. Если, в частности, уравнение (1) алгебраическое в отношении любой переменной t_k, τ_k, то таким же может быть взято и уравнение $\Phi(t, \tau) = 0$ (3). При этом все кривые (бинарных полей, шкал) любой номограммы этого уравнения являются алгебраическими и притом уникурсальными.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова
г. Свердловск

Поступило
10 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, ДАН, 97, № 4 (1954). [2] П. В. Николаев, Тр. Уральск. политехн. инст., 51 (1954). [3] П. В. Николаев, ДАН, 103, № 2 (1955).