Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

И. П. КУБИЛЮС

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ А. Н. КОЛМОГОРОВА О МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ В ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 IV 1955)

В этой заметке рассматривается распределение значений некоторого класса теоретико-числовых функций, тесно связанных с распределением простых чисел в натуральном ряду. Приводится теорема, являющаяся аналогом известной теоремы А. Н. Колмогорова ([1-3]), указанной в заглавии.

Теорема. *Пусть $f(p)$ — вещественная функция, определенная на множестве всех натуральных простых чисел и обладающая свойствами:*

$$B_u^2 = \sum_{p \leqslant u} \frac{f^2(p)}{p} \to \infty,$$

$$\Lambda_u = \max_{p \leqslant u} |f(p)| = o(B_u)$$

при $u \to \infty$.

Пусть, далее,

$$f_u(m) = \sum_{\substack{p \nmid m \\ p \leqslant u}} f(p), \quad A_u = \sum_{p \leqslant u} \frac{f(p)}{p};$$

$a(t)$ и $b(t)$ — две определенные в интервале $(0, 1)$ вещественные функции, имеющие непрерывные первые производные и удовлетворяющие неравенству $a(t) < 0 < b(t)$.

Тогда число натуральных $m \leqslant n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$a\left(\frac{B_p}{B_n}\right) < \frac{f_p(m) - A_p}{B_n} < b\left(\frac{B_p}{B_n}\right) \quad (p = 2, 3, 5, \ldots; p \leqslant n), \qquad (1)$$

а также число натуральных $m \leqslant n$, для которых

$$a\left(\frac{B_p}{B_n}\right) < \frac{f_p(m) - f_p(m+1)}{\sqrt{2}\,B_n} < b\left(\frac{B_p}{B_n}\right) \quad (p \leqslant 2, 3, 5, \ldots; p \leqslant n), \qquad (2)$$

при $n \to \infty$ равно $nv(0, 0) + o(n)$, где $v(x, t)$ есть то решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

которое при $t = 1$, $a(t) < x < b(t)$ принимает значение 1, а при $0 \leqslant t < 1$, $x = a(t)$ и $0 \leqslant t < 1$, $x = b(t)$ принимает значение 0.

Изложим вкратце доказательство теоремы, причем ограничимся лишь рассмотрением числа решений системы (2). Утверждение относительно системы (1) доказывается аналогично.

Обозначим через E множество всех натуральных чисел; через E_p — множество всех тех натуральных чисел, которые делятся на простое число p, а через F_p — множество всех натуральных m, для которых $p \setminus m+1$. Пусть $\mathfrak{F}_n$ — наименьшее тело множеств, содержащее E и все E_p, F_p с $p \leqslant n$. Все множества A из $\mathfrak{F}_n$ обладают асимптотической плотностью $P(A)$, т. е. для всякого $A \in \mathfrak{F}_n$ отношение числа натуральных чисел $m \in A$, не превосходящих u, к u при $u \to \infty$ стремится к пределу $P(A)$. Конечная система множеств $\mathfrak{F}_n$ совместно с функцией множества $P(A)$ образуют поле вероятностей в смысле аксиоматики Колмогорова ([4]).

Положим

$$f^{(p)}(m) = \begin{cases} f(p), & \text{если } p \setminus m, \\ 0, & \text{если } p \times m. \end{cases}$$

Тогда

$$f_u(m) - f_u(m+1) = \sum_{p \leqslant u} (f^{(p)}(m) - f^{(p)}(m+1)).$$

Кроме того, относительно построенного выше поля вероятностей функции $\psi^{(p)}(m) = f^{(p)}(m) - f^{(p)}(m+1)$, $p \leqslant n$, являются независимыми случайными величинами, принимающими три значения: $f(p)$ с вероятностью $1/p$, $-f(p)$ с вероятностью $1/p$ и 0 с вероятностью $1-2/p$. Математическое ожидание величины $\psi^{(p)}(m)$ равно 0, а дисперсия $2f^2(p)/p$. Применяя к случайным величинам $\psi^{(p)}(m)$ рассуждения, аналогичные используемым при доказательстве теоремы Колмогорова, получим, что асимптотическая плотность целых положительных m, удовлетворяющих (2), при $n \to \infty$ стремится к $v(0, 0)$.

Следуя ([5]), положим

$$r(n) = \exp\left\{\sqrt{\frac{\Lambda_n}{B_n}\ln n}\right\}, \quad s(n) = \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{\Lambda_n}{B_n}\ln n}\right\}.$$

Легко проверить, что $\ln r(n) = o(\ln n)$, $\ln s(n) = o(\ln n)$, $r(n) \to \infty$, $s(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть $\{a_i\}$ — множество тех натуральных чисел, все простые делители которых не превосходят $r(n)$, и пусть $\langle m \rangle$ равно наибольшему a_i, делящему m. Заметив, что $f_u(m) = f_u(\langle m \rangle)$ при $u \leqslant r(n)$, и используя метод эрастофенова решета, убеждаемся, что

$$v(0, 0) = \sum_{a_i, a_j}{}' \frac{1}{a_i a_j} \prod_{p \leqslant r(n)} (1 - \vartheta_p(a_i a_j)) + o(1),$$

где

$$\vartheta_p(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & \text{если } p \setminus a, \\ \dfrac{2}{p}, & \text{если } p \times a, \end{cases}$$

причем сумма берется по всем взаимно простым a_i, a_j, не превосходящим $s(n)$ и удовлетворяющим системе неравенств

$$a\left(\frac{B_p}{B_{r(n)}}\right) < \frac{f_p(a_i) - f_p(a_j)}{\sqrt{2}\,B_{r(n)}} < b\left(\frac{B_p}{B_{r(n)}}\right) \quad (p = 2, 3, \ldots; p \leqslant r(n)).$$

Аналогично получаем, что число целых положительных $m \leqslant n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$a\left(\frac{B_p}{B_{r(n)}}\right) < \frac{f_p(m) - f_p(m+1)}{\sqrt{2}\,B_{r(n)}} < b\left(\frac{B_p}{B_{r(n)}}\right) \quad (p = 2, 3, \ldots; p \leqslant r(n)),$$

равно

$$n \sum_{a_i, a_j}{}' \frac{1}{a_i a_j} \prod_{p \leqslant r(n)} (1 - \vartheta_p(a_i a_j)) + o(n),$$

где суммируется по тем же a_i, a_j; следовательно, это число равно $nv(0, 0) + o(n)$.

Остается показать, что последнее утверждение сохраняет силу и для числа решений системы (2) в натуральных $m \leqslant n$. Для этого заметим, что при $r(n) < u \leqslant n$

$$B_u^2 - B_{r(n)}^2 = \sum_{r(n) < p \leqslant u} \frac{f^3(p)}{p} \ll \Lambda_n^2 \ln \frac{B_n}{\Lambda_n} = o(B_n^2)$$

и

$$f_u(m) - f_{r(n)}(m) = \sum_{\substack{p \nmid m \\ r(n) < p \leqslant u}} f(p) \ll \Lambda_n \frac{\ln n}{\ln r(n)} = o(B_n).$$

Из этих оценок и хорошо известных свойств решений уравнения (3) следует доказываемый результат.

За предложение данной задачи и ценные указания автор выражает благодарность Ю. В. Линнику.

Физико-технический институт
Академии наук Литовской ССР

Поступило
15 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., № 7, 972 (1931). [2] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., № 3, 363 (1933). [3] А. Я. Хинчин, Основные законы теории вероятностей, 1936. [4] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, 1936. [5] P. Erdös, M. Kac, Am. J. Math., 62, 738 (1940).