Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

М. И. ГРАЕВ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СЛЕДОВ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 IV 1955)

Одним из основных понятий в теории представлений групп является понятие следа представления. Следом конечномерного представления называется след матрицы представления. Такое понятие следа не может быть непосредственно перенесено на бесконечномерные представления.

Естественным определением следа оператора в гильбертовом пространстве является следующее ([4]). Пусть A — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Будем говорить, что оператор A имеет след, если для любого ортонормированного базиса $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ в H ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (A\psi_n, \psi_n)$ сходится и его сумма не зависит от выбора базиса. Сумму этого ряда будем называть следом оператора A.

Если T_g — унитарное представление простой группы Ли, то операторы T_g не имеют следа в указанном смысле. Чтобы придать смысл понятию следа оператора T_g, рассматривают операторы представления группового кольца. Пусть $x(g)$ — непрерывная функция на группе, равная нулю вне компактного множества. Как показал Хариш Чандра ([4]), оператор $T_x = \int x(g)\, T_g\, dg$ имеет след, который есть распределение в смысле Л. Шварца. Таким образом, след оператора T_g всегда существует как обобщенная функция.

Формулы для следов неприводимых унитарных представлений комплексных простых групп Ли были получены в ([1]). Представления этих групп реализуются в пространствах функций с интегрируемым квадратом. Оператор $T_x = \int x(g)\, T_g\, dg$ является оператором Гильберта — Шмидта с ядром $K_x(z_1, z_2)$ и след $S(T_x)$ оператора T_x вычисляется по формуле

$$S(T_x) = \int K_x(z, z)\, dz. \tag{1}$$

При этом оказывается, что интеграл (1) представим в виде

$$S(T_x) = \int x(g)\, \pi(g)\, dg. \tag{2}$$

Функция $\pi(g)$ есть тогда по определению след оператора T_g.

При переходе к вещественным простым группам задача вычисления следа представления усложняется. Причина этого в том, что представления этих групп реализуются естественным образом не

в пространствах функций с интегрируемым квадратом, а в пространствах функций, аналитических по некоторым из переменных. Чтобы вычислить след по формуле (1), необходимо реализовать представление в пространстве функций с интегрируемым квадратом. Таким путем были найдены в [2] следы неприводимых унитарных представлений вещественных унимодулярных групп.

В данной заметке дается новый метод вычисления следов унитарных представлений вещественных простых групп Ли. Идею этого метода мы продемонстрируем на примере дискретной серии представлений группы вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка. Эта группа изоморфна группе матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где $g_{22} = \bar{g}_{11}$, $g_{21} = \bar{g}_{12}$ и $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1$. Представления дискретной серии задаются целым положительным индексом n. Они реализуются в гильбертовом пространстве функций $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в круге $z\bar{z} < 1$, со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{z\bar{z}<1} f_1(z)\overline{f_2(z)}(1 - z\bar{z})^{n-2}\, dx\, dy.$$

Оператор представления T_g задается формулой

$$T_g f(z) = f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right)(g_{12}z + g_{22})^{-n}. \tag{3}$$

Формула (3) определяет оператор T_g не только для матриц g рассматриваемой группы, но и для произвольной комплексной унимодулярной матрицы g. Этот оператор уже не будет унитарным и может оказаться неограниченным.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ совокупность всех матриц $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, для которых преобразование $z \to \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}$ переводит область Ω: $z\bar{z} < 1$ в область Ω_g, замыкание которой лежит внутри Ω. Многообразие $\mathfrak{A}$ есть связное и открытое подмножество множества всех унимодулярных матриц. Оказывается, что если $g \in \mathfrak{A}$, то оператор T_g вполне непрерывен и имеет след $S(T_g)$. При этом $S(T_g)$ является аналитической функцией от элементов матрицы g. Если две матрицы g_1 и g_2 из $\mathfrak{A}$ сопряжены в группе унимодулярных матриц, то $S(T_{g_1}) = S(T_{g_2})$. Тем самым вычисление $S(T_g)$ сводится к вычислению следа оператора, отвечающего диагональной матрице g. Вычисление же следа последнего оператора элементарно.

Если g — диагональная матрица из $\mathfrak{A}$, $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, то $|\lambda| < 1$. В силу (3),

$$T_g f(z) = f(\lambda^2 z)\lambda^n.$$

В пространстве функций $f(z)$ рассмотрим ортогональный базис $\psi_m = z^m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Имеем $T_g\psi_m = \lambda^{n+2m}\psi_m$, откуда

$$S(T_g) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{n+2m} = \frac{\lambda^n}{1 - \lambda^2}. \tag{4}$$

Матрицы g вещественной группы являются граничными точками многообразия $\mathfrak{A}$. Поэтому след оператора T_g, отвечающего матрице g вещественной группы, может быть определен как предельное значение $S(T_g)$ для $g \in \mathfrak{A}$. Этот след будет также определяться формулой (4).

Данное здесь определение следа оператора T_g оправдывается следующей теоремой:

Если $T_x = \int x(g)\, T_g\, dg$, *где функция* $x(g)$ *равна нулю вне компактного множества, то след оператора* T_x (*в обычном смысле*) *выражается формулой*

$$S(T_x) = \int x(g)\, S(T_g)\, dg.$$

Подобные рассуждения могут быть проведены и для других вещественных групп.

В [3] были рассмотрены унитарные представления вещественных форм комплексной унимодулярной группы матриц n-го порядка. Эти группы реализуются как группы комплексных унимодулярных матриц порядка n, сохраняющих невырожденную эрмитову форму $\varphi(x, x) = -x_1\bar{x}_1 - \ldots - x_p\bar{x}_p + x_{p+1}\bar{x}_{p+1} + \ldots + x_{p+q}\bar{x}_{p+q}$ $(p + q = n)$. Каждая такая группа обладает дискретной серией унитарных представлений. Представления строятся в пространстве функций $f(z_{pp}, z_{qq}, z_{qp})$, где z_{pp} — (p, p)-матрица, z_{qq} — (q, q)-матрица, z_{qp} — (q, p)-матрица, которые являются многочленами относительно элементов матриц z_{pp}, z_{qq}, а относительно элементов матрицы z_{qp} эти функции аналитичны в области $z_{qp} z^*_{qp} < e_q$ *.

Формула для операторов T_g представления, приведенная в [3], естественным образом распространяется на всевозможные комплексные унимодулярные матрицы g.

Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность всех унимодулярных матриц $g = \begin{pmatrix} g_{pp} & g_{pq} \\ g_{qp} & g_{qq} \end{pmatrix}$, где g_{ij} обозначает (i, j)-матрицу $(i, j = p, q)$, удовлетворяющих условиям:

1) $g^*_{pq} g_{pq} < g^*_{qq} g_{qq}$;

2) $g_{pq} g^*_{pq} < g_{pp} g^*_{pp}$;

3) преобразование $z \to (z_{qp} g_{pq} + g_{qq})^{-1} (z_{qp} g_{pp} + g_{qp})$ переводит область Ω: $z_{qp} z^*_{qp} < e_q$ в область Ω_g, замыкание которой лежит внутри Ω.

Тогда для многообразия $\mathfrak{A}$ справедливо все, сказанное выше для случая группы матриц 2-го порядка. В частности, если $g \in \mathfrak{A}$, то оператор T_g имеет след, и вычисление этого следа сводится целиком к вычислению следов операторов, отвечающих диагональным матрицам из $\mathfrak{A}$. Отсюда легко выводится следующая формула для следа $S(T_g)$ оператора T_g.

Пусть $g \in \mathfrak{A}$ и $\delta'_1, \ldots, \delta'_p$, $\delta''_1, \ldots, \delta''_q$ — собственные значения матрицы g, причем $|\delta'_i| < |\delta''_j|$ $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q)$. Тогда

$$S(T_g) = \frac{|\delta'^{k_1}, \ldots, \delta'^{k}{}_{p-1}, 1| \cdot |\delta''^{-l_1}, \ldots, \delta''^{-l_{q-1}}, 1| (\delta'_1 \delta'_2 \ldots \delta'_p)^{m-n+1}}{|\delta'^{p-1}, \ldots, \delta', 1| \cdot |\delta''^{q-1}, \ldots, \delta'', 1| \cdot \prod\limits_{s,\,t} (\delta''_s - \delta'_t)}. \qquad (5)$$

---

* Т. е. в области, где матрица $e_q - z_{qp} z^*_{qp}$ является положительно-определенной

Здесь $k_1 > \ldots > k_{p-1}$, $l_1 > \ldots > l_{q-1}$, m — индексы, определяющие представление, а символ $|\delta^{k_1}, \delta^{k_2}, \ldots, \delta^{k_p}|$ обозначает определитель

$$|\delta^{k_1}, \delta^{k_2}, \ldots, \delta^{k_p}| = \begin{vmatrix} \delta_1^{k_1} \delta_2^{k_1} \ldots \delta_p^{k_1} \\ \delta_1^{k_2} \delta_2^{k_2} \ldots \delta_p^{k_2} \\ \ldots\ldots \\ \delta_1^{k_p} \delta_2^{k_p} \ldots \delta_p^{k_p} \end{vmatrix}.$$

Матрицы рассматриваемой вещественной группы G являются предельными точками многообразия $\mathfrak{A}$. Ввиду этого след $S(T_g)$ для $g \in G$ можно определить как предельное значение $S(T_g)$ для $g \in \mathfrak{A}$. Формула (5) позволяет тогда найти след любого оператора представления группы G. Данное определение следа оператора T_g оправдано, как и для группы матриц 2-го порядка, тем, что для оператора $T_x = \int x(g) T_g dg$ мы имеем $S(T_x) = \int x(g) S(T_g) dg$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 36 (1950). [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, ДАН, 100, № 6 (1955). [3] М. И. Граев, ДАН, 98, № 4 (1954). [4] Harish-Chandra, Trans. Am. Math. Soc., 76, No. 2 (1954).