Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 IV 1955)

Пусть многочлены $\{\hat{P}_n(z)\}$ ортонормальны на единичной окружности относительно обложения $d\sigma(\varphi)$, где $\sigma(\varphi)$ — неубывающая ограниченная 3π-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} \lg \sigma'(\varphi)\, d\varphi > -\infty. \tag{1}$$

Рассмотрим ортогональный ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \hat{P}_k(z), \quad |z|<1, \tag{2}$$

который при условии $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$ сходится абсолютно и равномерно для $|z| \leqslant r < 1$; применяя рассуждения В. И. Смирнова ([1], § 9), находим, что $f(z) D(z) \in H_2$, где

$$D(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \lg p(\varphi)\, d\varphi\right\}, \quad |z|<1, \quad p(\varphi) = \sigma'(\varphi). \tag{3}$$

Функция $D(z) \in H_2$ имеет почти всюду на единичной окружности радиальные граничные значения, причем

$$|D(e^{i\varphi})|^2 = p(\varphi) \tag{4}$$

почти всюду в $[0, 2\pi]$; следовательно, функция $f(z) = f(re^{i\varphi})$ имеет почти всюду на единичной окружности радиальные граничные значения.

Установим для ортогональных рядов (2) теоремы, аналогичные теоремам Абеля, Таубера и Фату — Рисса в теории степенных рядов.

1. Будем пользоваться теоремой нашей заметки ([2]):

Теорема 1. *Для того чтобы в каждой точке φ_0, где существует $\sigma'(\varphi_0) > 0$, существование радиального граничного значения*

$$\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\varphi_0}) = f(e^{i\varphi_0}) \tag{5}$$

было эквивалентно сходимости ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{P}_n(e^{i\varphi_0}) = f(e^{i\varphi_0}), \tag{6}$$

достаточно условие

$$b_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{Mn}}\right), \tag{7}$$

где $|\hat{P}_n(z)| \leqslant M_n$ *для* $|z| \leqslant 1$ *и числа* $\{M_n\}_0^\infty$ *образуют неубывающую последовательность.*

Покажем, как, накладывая те или иные ограничения на функцию $\sigma(\varphi)$, можно получить соответствующие значения M_n и ограничения для b_n.

Теорема 2. *Если* $p(\varphi) \geqslant m > 0$ *почти всюду в* $[0, 2\pi]$, *то для эквивалентности* (5), (6) *достаточно условие*

$$b_n = o(n^{-7/6}). \tag{8}$$

Для доказательства достаточно заметить, что при условии теоремы $M_n = C\sqrt{n}$.

Обозначим через $\omega_2(p; \delta)$ интегральный модуль непрерывности функции $p(\varphi)$ (в метрике L_2).

Теорема 3. *Пусть функция* $\sigma(\varphi)$ *абсолютно непрерывна, причем* $0 < m \leqslant p(\varphi) \leqslant M$ *почти всюду в* $[0, 2\pi]$.

Если

$$\omega_2(p; \delta) = O(\sqrt{\delta}), \tag{9}$$

то для эквивалентности (5), (6) *достаточно условие* *

$$b_n = o\left(\frac{1}{n}\right); \tag{10}$$

если же

$$\sqrt{\delta} = o[\omega_2(p; \delta)],$$

то достаточно условие

$$b_n = o\left\{n^{-7/6}\left[\omega_2\left(p; \frac{1}{n}\right)\right]^{-1/3}\right\}; \tag{11}$$

если, кроме того,

$$\omega_2(p; \delta) = O(\delta^\alpha), \quad \alpha < 1/2,$$

то

$$b_n = o\left(n^{-\frac{7-2\alpha}{6}}\right). \tag{12}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой

$$M_n \leqslant C_1 + C_2\sqrt{n}\,\omega_2\left(p; \frac{1}{n}\right), \tag{13}$$

которая вытекает из рассуждений нашей заметки (3).

2. Рассмотрим теперь теорему, аналогичную до некоторой степени теореме Фату — Рисса в теории степенных рядов.

Теорема 4. *Пусть функция* $\sigma(\varphi)$ *абсолютно непрерывна и пусть вся ортогональная система ограничена*

$$|\hat{P}_n(e^{i\varphi})| \leqslant A \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad \varphi \in l; \tag{14}$$

на отрезке $l \subset [0, 2\pi]$. *Если на всей дуге* $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in l$, *существуют радиальные граничные значения* $f(e^{i\varphi})$, *причем граничная функция* $f(e^{i\varphi}) \in \mathrm{Lip}\,1$, *то для* $\varphi_0 \in l_0$, *где* l_0 *лежит внутри* l, *справедливо* (6).

* При $p(\varphi) \equiv 1$ оно переходит в условие, данное Таубером.

Применяя формулу Кристоффеля—Дарбу, легко получим:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \hat{P}_k(e^{i\varphi_0}) - f(e^{i\varphi_0}) = \alpha_n \hat{P}_n^*(e^{i\varphi_0}) - \beta_n e^{i\varphi_0} \hat{P}_n(e^{i\varphi_0}),$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\, e^{i\varphi} \overline{\hat{P}_n^*(e^{i\varphi})}\, p(\varphi)\, d\varphi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\, \overline{\hat{P}_n(e^{i\varphi})}\, p(\varphi)\, d\varphi \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{15}$$

$$\hat{P}_n^*(z) = z^n \overline{\hat{P}_n}\left(\frac{1}{z}\right),$$

где мы положили

$$\psi(\varphi) = \frac{f(e^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi_0})}{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0}}. \tag{16}$$

Так как условие $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$ эквивалентно существованию интеграла (см. [1], § 9)

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 p(\varphi)\, d\varphi < \infty, \tag{17}$$

то нетрудно установить существование интеграла

$$\int_0^{2\pi} |\psi(\varphi)|^2 p(\varphi)\, d\varphi < \infty, \tag{18}$$

пользуясь тем, что φ_0 лежит внутри l; отсюда, благодаря неравенству Бесселя, имеем $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Для α_n имеем

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \psi(\varphi) D(e^{i\varphi}) \{\overline{\hat{P}_n^*(e^{i\varphi}) D(e^{i\varphi})} - 1\}\, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} D(e^{i\varphi}) \psi(\varphi)\, d\varphi.$$

Применяя неравенство Буняковского—Шварца, находим, что первый интеграл стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$ (см. [1], § 10); второй интеграл можно записать так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \psi(\varphi) D(e^{i\varphi})\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) D(z) - f(z_0) D(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{D(z) - D(z_0)}{z - z_0}\, dz,$$

где $z = e^{i\varphi}$, $z_0 = e^{i\varphi_0}$; так как $D(z)$, $D(z) f(z) \in H_2$, то он равен нулю; отсюда, благодаря ограниченности $|\hat{P}_n^*(e^{i\varphi_0})|$, $|\hat{P}_n(e^{i\varphi_0})|$, вытекает утверждение теоремы.

Примечание. В частности, теорема верна, если функция $f(z)$ регулярна на дуге $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in l$; если же наложить на вес дополнительное ограничение $p(\varphi) \leqslant M$, $\varphi \in l$, то достаточно потребовать, чтобы $f(e^{i\varphi}) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $^1/_2 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi \in l$.

Харьковский авиационный
институт

Поступило
1 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, Изв. АН СССР, ОМЕН, 337 (1932). [2] Я. Л. Геронимус, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 123 (1950). [3] Я. Л. Геронимус, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 469 (1952).